

Муниципальное общеобразовательное бюджетное учреждение  
«Рождественская средняя общеобразовательная школа»

Рассмотрена и одобрена

Согласовано

Утверждаю

на заседании методического  
объединения

## Руководитель ШМО

\_\_\_\_\_/ Кокурина Л.И./

Протокол № \_\_\_\_\_

ОТ «                      » \_\_\_\_\_ 2023

Заместитель директора по  
УВР МОБУ

«Рождественская СОШ»

Планкина Е.А.

«        » \_\_\_\_\_ 2023

\_\_\_\_\_

Директор МОБУ  
«Рождественская СОШ»

Учеваткин С.А.

«        » \_\_\_\_\_ 2023г.

\_\_\_\_\_

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

учебного предмета «МАТЕМАТИКА:  
алгебра и начала математического анализа, геометрия»  
(базовый уровень)  
11 класс

на 2023-2024 учебный год

Кокурина Л. И.  
учитель математики  
первой категория

с. Рождественно, 2023 год

## **ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

### ***Цели изучения учебного предмета***

Изучение математики (алгебра и начала математического анализа, геометрия) в 11 классе направлено на достижение следующих целей:

- формирование представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;
- развитие логического мышления, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для обучения в высшей школе по соответствующей специальности, в будущей профессиональной деятельности;
- овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для изучения школьных естественнонаучных дисциплин на базовом уровне, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;
- воспитание средствами математики культуры личности: отношения к математике как части общечеловеческой культуры: знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей, понимания значимости математики для общественного прогресса.

Данная рабочая программа полностью отражает профильный уровень подготовки школьников по разделам программы. Она конкретизирует содержание тем образовательного стандарта и дает примерное распределение учебных часов по разделам курса.

Рабочая программа выполняет две основные функции:

- информационно-методическая функция позволяет всем участникам образовательного процесса получить представление о целях, содержании, общей стратегии обучения, воспитания и развития учащихся средствами данного учебного предмета;
- организационно-планирующая функция предусматривает выделение этапов обучения, структурирование учебного материала, определение его количественных и качественных характеристик на каждом из этапов, в том числе для содержательного наполнения промежуточной аттестации учащихся.

Рабочая программа составлена на основе следующих документов:

1. Закон РФ от 29 декабря 2012 года № 273-ФЗ "Об образовании в Российской Федерации" (с изменениями и дополнениями).
2. Приказ Минобрнауки РФ от 5 марта 2004 г. №1089 "Об утверждении федерального компонента государственных образовательных стандартов начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования" (с изменениями и дополнениями).
3. Приказ Министерства образования РФ от 09.03.2004 года №1312 «Об утверждении Федерального базисного учебного плана и примерных учебных планов для образовательных учреждений Российской Федерации, реализующих программы общего образования (с изменениями и дополнениями).
4. Приказ Минпросвещения России от 28.12.2018 года №345 (ред. от 08.05.2019) "О федеральном перечне учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования".

Рабочая программа составлена на основе примерной программы среднего общего образования по математике, рекомендованной Министерством образования и науки РФ.

### **Место предмета в учебном плане**

Количество часов по программе – 170 ч. Из расчета 5 часов в неделю (102 ч. по модулю «Алгебра» и 68 ч. по модулю «Геометрия»). При этом изучение курса построено в форме последовательности тематических блоков с чередованием материала по алгебре, математическому анализу, геометрии.

## Общая характеристика учебного предмета

### **Модуль «Алгебра и начала математического анализа»**

При изучении курса математики продолжают и получают развитие содержательные линии: «Алгебра», «Функции», «Уравнения и неравенства». В рамках указанных содержательных линий решаются следующие задачи:

- систематизация сведений о числах; изучение новых видов числовых выражений и формул; совершенствование практических навыков и вычислительной культуры, расширение и совершенствование алгебраического аппарата, сформированного в основной школе, и его применение к решению математических и нематематических задач;
- расширение и систематизация общих сведений о функциях, пополнение класса изучаемых функций, иллюстрация широты применения функций для описания и изучения реальных зависимостей.

### **Модуль «Геометрия»**

Геометрия – один из важнейших компонентов математического образования, необходимая для приобретения конкретных знаний о пространстве и практически значимых умений, формирования языка описания объектов окружающего мира, для развития пространственного воображения и интуиции, математической культуры, для эстетического воспитания учащихся. Изучение геометрии вносит вклад в развитие логического мышления, в формирование понятия доказательства.

В ходе изучения курса обучающиеся получают возможность:

- изучить свойства пространственных тел;
- уметь применять полученные знания для решения практических задач;
- развить пространственные представления и изобразительные умения;
- развить логическое мышление и речь – умения логически обосновывать суждения, проводить несложные систематизации, приводить примеры и контрпримеры.

## Планируемые результаты освоения учебного предмета

В ходе изучения математики в профильном курсе старшей школы учащиеся продолжают овладение разнообразными способами деятельности, приобретают и совершенствуют опыт.

Программа предполагает достижение выпускниками старшей школы следующих личностных, метапредметных и предметных результатов.

### **Личностные:**

- умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры;
- критичность мышления, умение распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта;
- представление о математической науке как сфере человеческой деятельности, об этапах ее развития, о ее значимости для развития цивилизации;
- креативность мышления, инициатива, находчивость, активность при решении математических задач;
- умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности;
- способность к эмоциональному восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений.

### **Метапредметные:**

- первоначальные представления об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники, о средстве моделирования явлений и процессов;
- умение видеть математическую задачу в контексте проблемной ситуации в других дисциплинах, в окружающей жизни;
- умение находить в различных источниках информацию, необходимую для решения математических проблем, и представлять ее в понятной форме; принимать решение в условиях неполной и избыточной, точной и вероятностной информации;
- умение понимать и использовать математические средства наглядности (графики, таблицы, схемы и др.) для иллюстрации, интерпретации, аргументации;
- умение выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимать необходимость их проверки;

- умение применять индуктивные и дедуктивные способы рассуждений, видеть различные стратегии решения задач;
- понимание сущности алгоритмических предписаний и умение действовать в соответствии с предложенным алгоритмом;
- умение самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных математических проблем;
- умение планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение задач исследовательского характера.

***Предметные:***

- умения проведения доказательных рассуждений, логического обоснования выводов, использования различных языков математики для иллюстрации, интерпретации, аргументации и доказательства;
- умения планирования и осуществления алгоритмической деятельности, выполнение и самостоятельное составление алгоритмических предписаний и инструкций на математическом материале;
- умения построения и исследования математических моделей для описания и решения прикладных задач, задач из смежных дисциплин и реальной жизни;
- умения строить и исследовать простейшие математические модели при решении прикладных задач, задач из смежных дисциплин, углубление знаний об особенностях применения математических методов к исследованию процессов и явлений в природе и обществе;
- умения самостоятельно составлять формулы на основе обобщения частных случаев и результатов эксперимента;
- представлений о геометрии как части мировой культуры и о ее месте в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;
- представлений об историческом пути развития геометрии как науки;
- представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;
- владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;
- владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах;
- умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры;
- умения применять изученные свойства геометрических фигур и формулы для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием.

**Общеучебные умения, навыки и способы деятельности.**

В ходе освоения содержания математического образования обучающиеся овладевают разнообразными способами деятельности, приобретают и совершенствуют опыт:

- построения и исследования математических моделей для описания и решения прикладных задач, задач из смежных дисциплин;
- выполнения и самостоятельного составления алгоритмических предписаний и инструкций на математическом материале; выполнения расчетов практического характера;
- использования математических формул и самостоятельного составления формул на основе обобщения частных случаев и эксперимента;
- самостоятельной работы с источниками информации, обобщения и систематизации полученной информации, интегрирования ее в личный опыт;
- проведения доказательных рассуждений, логического обоснования выводов, различения доказанных и недоказанных утверждений, аргументированных и эмоционально убедительных суждений;
- самостоятельной и коллективной деятельности, включения своих результатов в результаты работы группы, соотнесение своего мнения с мнением других участников учебного коллектива и мнением авторитетных источников

**Отличительные особенности рабочей программы по алгебре и началам анализа по сравнению с примерной:**

№ темы	Наименование разделов и тем	Кол-во часов по программе	Планируемое количество часов учителем	Контроль	Примечание
<b>Модуль «Алгебра»</b>					
	Повторение «Алгебра 10», «Геометрия 10»	0	8	Входная К/р №1	
Глава 1.	Тригонометрические функции	18	14	К/р №2	
Глава 2.	Производная и ее геометрический смысл	18	16	К/р №4	
Глава 3.	Применение производной к исследованию функции	13	13	К/р №7	К/р за 1 полугодие № 5
Глава 4.	Первообразная и интеграл	10	11	К/р №8	
Глава 5.	Комбинаторика	9	7	К/р №10	
Глава 6.	Элементы теории вероятностей	7	7	К/р №11	
Глава 8.	Уравнения и неравенства с двумя переменными	7	6	К/р №13	
	Повторение. Решение задач	20	20	Итоговая к/р №15	Промежуточная аттестация к/р №14
	Итого	102	102	9	2
<b>Модуль «Геометрия»</b>					
	Повторение курса «Геометрия 10»	0	2		
Глава 1.	Векторы в пространстве	6	6		
Глава 2.	Метод координат в пространстве. Движения.	11	11	К/р №3	
Глава 3.	Цилиндр, конус и шар	13	14	К/р №6	
Глава 4.	Объемы тел	15	19	К/р №9, К/р № 12	
	Итоговое повторение	6	16	4	
	Итого	51	68		

## СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО ПРЕДМЕТА

### *Модуль «Алгебра»*

#### АЛГЕБРА

##### *ВВОДНОЕ ПОВТОРЕНИЕ*

##### *Тригонометрические функции*

Область определения и множество значений, чётность и нечётность, периодичность. Свойства функций  $y=\sin x$ ,  $y=\cos x$ ,  $y=\operatorname{tg} x$ ,  $y=\operatorname{ctg} x$ .

##### *Производная и её применение*

Предел последовательности, предел функции, непрерывность функции, определение производной, правила дифференцирования, производные различных функций.

##### *Применение производной к исследованию функций*

Возрастание и убывание функций, экстремумы функций, наибольшее и наименьшее значения функций, производная второго порядка, выпуклость и точки перегиба, построение функций.

##### *Первообразная и интеграл*

Первообразная, правила нахождения первообразных, площадь криволинейной трапеции, интеграл и его вычисление, применение интегралов для решения физических задач.

##### *Комбинаторика*

Математическая индукция. Правило произведения. Размещения с повторениями.

Перестановки. Размещения без повторений. Сочетания без повторений и бином Ньютона. Сочетания с повторениями.

##### *Элементы теории вероятностей*

Вероятность события. Сложение вероятностей. Условная вероятность. Независимость событий. Формула Бернулли.

##### *Уравнения и неравенства с двумя неизвестными*

Линейные уравнения и неравенства с двумя переменными. Нелинейные уравнения и неравенства с двумя неизвестными. Уравнения и неравенства с двумя неизвестными, содержащие параметры.

##### **Итоговое повторение**

### **Модуль «Геометрия»**

#### **Цилиндр, конус и шар**

Понятие цилиндра. Площадь поверхности цилиндра. Понятие конуса. Площадь поверхности конуса. Усечённый конус. Сфера и шар. Площадь сферы. Сечения цилиндрической поверхности.

#### **Объёмы тел**

Объём прямоугольного параллелепипеда. Объёмы прямоугольного параллелепипеда. Объёмы прямой призмы и цилиндра. Объёмы наклонной призмы, пирамиды и конуса.

#### **Метод координат в пространстве**

Векторы. Модуль вектора. Равенство векторов. Сложение векторов и умножение вектора на число. Коллинеарные векторы. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Компланарные векторы. Разложение по трём некомпланарным векторам.

#### **Итоговое повторение**

## Тематическое планирование

№ п/п	Наименование разделов и тем	Максимальная нагрузка	Из них	
			Теоретическо е обучение, ч.	Контрольная работа, ч.
Модуль «Алгебра»				
I	Повторение курса «Алгебра 10», «Геометрия 10»	8	7	1
II	Тригонометрические функции	14	13	1
III	Производная и ее геометрический смысл	16	15	1
IV	Применение производной к исследованию функции	13	12	1
V	Первообразная и интеграл	11	9	2
VI	Комбинаторика	7	6	1
VII	Элементы теории вероятностей	7	6	1
VIII	Уравнения и неравенства с двумя переменными	6	5	1
IX	Итоговое повторение	20	18	2
Модуль «Геометрия»				
I	Повторение курса «Геометрия 10»	2	2	-
II	Векторы	6	6	
III	Метод координат в пространстве	11	10	1
IV	Цилиндр, конус и шар	14	13	1
V	Объемы тел	19	17	2
VI	Итоговое повторение	16	16	-
	Итого	170	156	14

**В результате изучения модуля «Алгебра» в 11 классе ученик должен знать/понимать:**

- значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и в то же время ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;
- значение практики и вопросов, возникающих в самой математике для формирования и развития математической науки; историю развития понятия числа.

### АЛГЕБРА

#### **уметь**

- выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы, применение вычислительных устройств; находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма, используя при необходимости вычислительные устройства; пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах;
- проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции;
- вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования;

**использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:**

- практических расчетов по формулам, включая формулы, содержащие степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции, используя при необходимости справочные материалы и простейшие вычислительные устройства.

### ФУНКЦИИ

#### **уметь**

- определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции;
  - строить графики изученных функций;
  - описывать по графику и в простейших случаях по формуле поведение и свойства функций, находить по графику функции наибольшие и наименьшие значения;
  - решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков;
- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:**
- описания с помощью функций различных зависимостей, представления их графически, интерпретации графиков.

## **УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА**

### ***уметь***

- решать рациональные, показательные и логарифмические уравнения и неравенства, простейшие иррациональные и тригонометрические уравнения, их системы;
  - составлять уравнения и неравенства по условию задачи;
  - использовать для приближенного решения уравнений и неравенств графический метод;
  - изображать на координатной плоскости множества решений простейших уравнений и их систем;
- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:**
- построения и исследования простейших математических моделей.

### **В результате изучения модуля «Геометрия» в 11 классе ученик должен знать/понимать**

- значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и в то же время ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;
- историю возникновения и развития геометрии;

### ***уметь***

- распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;
  - описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;
  - анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;
  - изображать основные многогранники; выполнять чертежи по условиям задач;
  - строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;
  - решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей);
  - использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;
  - проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;
- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:**
- исследования (моделирования) несложных практических ситуаций на основе изученных формул и свойств фигур;
  - вычисления площадей поверхностей пространственных тел при решении практических задач, используя при необходимости справочники и вычислительные устройства.



### Календарно-тематическое планирование

№ п/п	Наименование разделов и тем.	Тип занятий	Кол-во часов	Дата проведения	
				Планир.	факт.
Повторение курса математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия за 10 класс (13 часов)					
1.	Преобразование выражений степенных и показательных	УОС	1	1.09	
2.	Преобразование выражений логарифмических и тригонометрических	УОС	1	4.09	
3.	Параллельность прямых и плоскостей. Перпендикулярность прямых и плоскостей	УОС	1	4.09	
4.	Различные способы решения дробно- рациональных и иррациональных уравнений и неравенств	УОС	1	5.09	
5.	Многогранники	УОС	1	7.09	
6.	Различные способы решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств	УОС	1	8.09	
7.	Основные приемы решения систем уравнений	УОС	1	11.09	
8.	Решение тригонометрических уравнений.	УОС	1	11.09	
9.	Решение тригонометрических уравнений.	УОС	1	12.09	
10.	<i>Входная контрольная работа № 1</i>	УКЗУН	1	14.09	
<i>Тригонометрические функции (14 часов).Метод координат в пространстве (14 часов)</i>					
11.	Область определения тригонометрических функций	УИНМ	1	15.09	
12.	Множество значений тригонометрических функций	УСЗУН	1	18.09	
13.	Понятие вектора в пространстве	УИНМ	1	18.09	
14.	Четность, нечетность тригонометрических функций	УОС	1	12.09	
15.	Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число	УИНМ	1	14.09	
16.	Периодичность тригонометрических функций	УКЗУН	1	15.09	
17.	Свойства $y = \cos x$ функции и ее график.	УИНМ	1	18.09	
18.	Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число	УСЗУН	1	18.09	
19.	Свойства $y = \cos x$ функции и ее график	УСЗУН	1	19.09	
20.	Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число	УСЗУН	1	21.09	
21.	Свойства $y = \cos x$ функции и ее график	УСЗУН	1	22.09	
22.	Свойства $y = \sin x$ функции и ее график	УИНМ	1	25.09	
23.	Компланарные векторы	УИНМ	1	25.09	
24.	Свойства $y = \sin x$ функции и ее график	УСЗУН	1	26.09	
25.	Компланарные векторы	УСЗУН	1	28.09	
26.	Свойства $y = \sin x$ функции и ее график	УСЗУН	1	29.09	

27.	Прямоугольная система координат в пространстве. Координаты вектора.	УИНМ	1	2.10	=
28.	Связь между координатами векторов и координатами точек.	УИНМ	1	2.10	
29.	Свойства $y = \operatorname{tg} x$ функции и ее график	УИНМ	1	3.10	
30.	Простейшие задачи в координатах	УИНМ	1	5.10	
31.	Решение задач по теме «Простейшие задачи в координатах»	УСЗУН	1	6.10	
32.	Угол между векторами. Скалярное произведение векторов.	УИНМ	1	9.10	
33.	Свойства $y = \operatorname{tg} x$ функции и ее график	УСЗУН	1	9.10	
34.	Обратные тригонометрические функции	УИНМ	1	10.10	
35.	Вычисление углов между прямыми и плоскостями.	УИНМ	1	12.10	
36.	Урок обобщения и систематизации знаний по теме «Тригонометрические функции»	УОС	1	13.10	
37.	<b>Контрольная работа №2 по теме «Тригонометрические функции»</b>	УКЗУН	1	16.10	
<b>Производная и ее геометрический смысл (16 часов)</b>					
38.	Анализ работы. Предел последовательности	УИНМ	1	16.10	
39.	Непрерывность функции	УИНМ	1	17.10	
40.	Вычисление углов между прямыми и плоскостями	УИНМ	1	19.10	
41.	Определение производной	УИНМ	1	20.10	
42.	Движения. Центральная симметрия. Осевая симметрия.	УИНМ	1	23.10	
43.	Определение производной	УСЗУН	1	23.10	
44.	Зеркальная симметрия. Параллельный перенос.	УИНМ	1	24.10	
45.	Правила дифференцирования	УИНМ	1	26.10	
46.	Правила дифференцирования	УСЗУН	1	27.10	
47.	Решение задач по теме «Метод координат в пространстве»	УСЗУН	1	6.11	
48.	Правила дифференцирования.	УСЗУН	1	7.11	
49.	<b>Контрольная работа №3 по теме «Метод координат в пространстве»</b>	УКЗУН	1	9.11	
50.	Производная степенной функции	УИНМ	1	10.11	
51.	Производная степенной функции	УСЗУН	1	13.11	
<b>Цилиндр, конус и шар (14 часов)</b>					
52.	Понятие цилиндра	УИНМ	1	13.11	
53.	Производная элементарных функций	УИНМ	1	14.11	
54.	Площадь поверхности цилиндра	УИНМ	1	16.11	
55.	Производная элементарных функций	УСЗУН	1	17.11	
56.	Производная элементарных функций	УСЗУН	1	20.11	
57.	Решение задач по теме «Цилиндр»	УСЗУН	1	20.11	

58.	Геометрический смысл производной	УИНМ	1	21.11	
59.	Понятие конуса	УИНМ	1	23.11	
60.	Геометрический смысл производной	УСЗУН	1	24.11	
61.	Урок обобщения и систематизации знаний	УОС	1	27.11	
62.	Площадь поверхности конуса. Решение задач	УИНМ	1	27.11	
63.	<b>Контрольная работа № 4 по теме «Производная и ее геометрический смысл»</b>	УКЗУН	1	28.11	
64.	Усеченный конус.		1	30.11	
<b>Применение производной к исследованию функции. ( 13 часов)</b>					
65.	Анализ работы. Возрастание и убывание функции	УИНМ	1	1.12	
66.	Возрастание и убывание функции	УСЗУН	1	4.12	
67.	Сфера и шар. Уравнение сферы.	УИНМ	1	4.12	
68.	Экстремумы функции	УИНМ	1	5.12	
69.	Взаимное расположение сферы и плоскости	УИНМ	1	7.12	
70.	Экстремумы функции	УСЗУН	1	8.12	
71.	Наибольшее и наименьшее значение функции	УИНМ	1	11.12	
72.	Касательная плоскость к сфере	УИНМ	1	11.12	
73.	Наибольшее и наименьшее значение функции	УСЗУН	1	12.12	
74.	Площадь сферы	УИНМ	1	14.12	
75.	Наибольшее и наименьшее значение функции.	УСЗУН	1	15.12	
76.	Урок обобщения и систематизации знаний	УОС	1	18.12	
77.	Вписанный и описанный шар в многогранник	УИНМ	1	18.12	
78.	<b>Контрольная работа № 5 за 1 полугодие</b>	УОС	1	19.12	
79.	Решение задач на многогранники, цилиндр, конус и шар	УСЗУН	1	21.12	
80.	Решение задач по теме «Цилиндр, конус и шар»	УСЗУН	1	22.12	
81.	<b>Контрольная работа №6 по теме «Цилиндр, конус и шар»</b>	УКЗУН	1	25.12	
<b>2 полугодие</b>					
82.	Производная второго порядка, выпуклость и точки перегиба	УИНМ	1	26.12	
<b>Объемы тел (19 часов)</b>					
83.	Понятие объема. Объем прямоугольного параллелепипеда	УИНМ	1	8.01	
84.	Построение графиков функции	УИНМ	1	8.01	
85.	Построение графиков функции	УСЗУН	1	9.01	
86.	Объем прямоугольной призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник	УИНМ	1	11.01	
<b>Первообразная и интеграл (11 часов)</b>					
87.	Первообразная	УИНМ	1	12.01	

88.	Решение задач по теме «Объем прямоугольного параллелепипеда»	УСЗУН	1	15.01	
89.	Первообразная	УСЗУН	1	15.01	
90.	Правила нахождения первообразных	УИНМ	1	16.01	
91.	Объем прямой призмы .	УИНМ	1	18.01	
92.	<b>Контрольная работа №7 по теме «Применение производной к исследованию функции»</b>	УКЗУН	1	19.01	
93.	Объем цилиндра.	УИНМ	1	22.01	
94.	Правила нахождения первообразных	УСЗУН	1	22.01	
95.	Площадь криволинейной трапеции. Интеграл и его вычисление	УИНМ	1	23.01	
96.	Решение задач по теме «Объем прямой призмы. Объем цилиндра»	УСЗУН	1	25.01	
97.	Площадь криволинейной трапеции. Интеграл и его вычисление	УСЗУН	1	26.01	
98.	Вычисление объема тел с помощью определенного интеграла	УИНМ	1	29.01	
99.	Применение интегралов для решения физических задач	УСЗУН	1	29.01	
100.	Урок обобщения и систематизации знаний	УОС	1	30.01	
101.	Объем наклонной призмы	УИНМ	1	1.02	
102.	Урок обобщения и систематизации знаний	УОС	1	2.02	
103.	Объем пирамиды	УИНМ	1	5.02	
104.	<b>Контрольная работа №8 по теме «Первообразная и интеграл»</b>	УКЗУН	1	5.02	
<b>Комбинаторика (7 часов)</b>					
105.	Анализ работы. Правило произведения. Размещения с повторениями	УИНМ	1	6.02	
106.	Решение задач по теме «Объем пирамиды и усеченной пирамиды»	УСЗУН	1	8.02	
107.	Перестановки	УИНМ	1	9.02	
108.	Объем конуса. Решение задач	УИНМ	1	12.02	
109.	Перестановки	УСЗУН	1	12.02	
110.	Размещения без повторений	УСЗУН	1	13.02	
111.	Решение задач на нахождение объема конуса	УСЗУН	1	15.02	
112.	Сочетания без повторений и бином Ньютона	УСЗУН	1	16.02	
113.	<b>Контрольная работа №9 по теме «Объемы тел»</b>	УКЗУН	1	19.02	
114.	Урок обобщения и систематизации знаний	УОС	1	19.02	
115.	<b>Контрольная работа №10 по теме «Комбинаторика»</b>	УКЗУН	1	20.02	
116.	Анализ работы. Объем шара.	УИНМ	1	22.02	
<b>Элементы теории вероятностей (7 часов)</b>					
117.	Вероятность события	УИНМ	1	26.02	
118.	Решение задач на вычисление объема шара	УСЗУН	1	26.02	
119.	Вероятность события	УСЗУН	1	27.02	

120.	Объем шарового сегмента, шарового слоя, сектора	УИНМ	1	29.02	
121.	Сложение вероятностей	УИНМ	1	1.03	
122.	Решение задач по теме «Объем шара»	УСЗУН	1	4.03	
123.	Сложение вероятностей	УСЗУН	1	4.03	
124.	Площадь сферы	УИНМ	1	5.03	
125.	Вероятность произведения независимых событий.	УИНМ	1	7.03	
126.	Решение задач по темам «Объем шара и его частей», «Площадь сферы»	УСЗУН	1	11.03	
127.	Урок обобщения и систематизации знаний	УОС	1	11.03	
128.	<b>Контрольная работа №11 по теме «Элементы теории вероятностей»</b>	УКЗУН	1	12.03	
129.	<b>Контрольная работа №12 по теме «Объем шара и площадь сферы»</b>	УКЗУН	1	14.03	
<b>Уравнения и неравенства с двумя переменными (6 часов)</b>					
130.	Анализ работы. Линейные уравнения и неравенства с двумя переменными	УИНМ	1	15.03	
<b>Итоговое повторение. Модуль «Геометрия» (16 часов)</b>					
131.	Повторение. Аксиомы стереометрии	УОС	1	18.03	
132.	Линейные уравнения и неравенства с двумя переменными	УСЗУН	1	18.03	
133.	Нелинейные уравнения и неравенства с двумя переменными	УИНМ	1	19.03	
134.	Повторение. Параллельность прямых. Параллельность прямой и плоскости. Скрещивающиеся прямые. Параллельность плоскостей	УСЗУН	1	21.03	
135.	Нелинейные уравнения и неравенства с двумя переменными.	УСЗУН	1	22.03	
136.	Повторение. Перпендикулярность прямой и плоскости. Теорема о трех перпендикулярах. Угол между прямой и плоскостью.	УСЗУН	1	4.04	
137.	Урок обобщения и систематизации знаний	УОС	1	5.04	
138.	<b>Контрольная работа №13 по теме «Уравнения и неравенства с двумя переменными»</b>	УКЗУН	1	8.04	
139.	Повторение. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей	УОС	1	8.04	
<b>Итоговое повторение. Модуль «Алгебра» (20 часов)</b>					
140.	Основы тригонометрии	УОС	1	9.04	
141.	Многогранники: параллелепипед, призма; площади их поверхностей	УОС	1	11.04	
142.	Основы тригонометрии	УОС	1	12.04	
143.	Логарифмы	УОС	1	15.04	
144.	Повторение. Векторы в пространстве. Действия над векторами. Скалярное произведение векторов	УОС	1	15.04	
145.	Логарифмы	УОС	1	16.04	
146.	Повторение. Цилиндр, конус и шар, площади их поверхностей	УОС	1	18.04	

147.	Преобразования выражений	УОС	1	19.04	
148.	Преобразования выражений	УОС	1	22.04	
149.	Повторение по теме «Объемы тел»	УОС	1	22.04	
150.	Уравнения	УОС	1	23.04	
151.	Решение задач на вычисление объемов тел	УОС	1	25.04	
152.	Уравнения	УОС	1	26.04	
153.	Уравнения	УОС	1	29.04	
154.	Повторение по теме «Тела вращения»	УОС	1	29.04	
155.	Повторение по теме «Комбинации с описанными сферами»	УОС	1	30.04	
156.	Неравенства	УОС	1	6.05	
157.	Неравенства	УОС	1	6.05	
158.	Повторение по теме «Комбинации с вписанными сферами»	УОС	1	7.05	
159.	Функции (определение и график функции)	УОС	1	8.05	
160.	Производная.	УОС	1	8.05	
161.	Производная.	УОС	1	13.05	
162.	Решение задач ЕГЭ	УОС	1	13.05	
163.	Первообразная и интеграл	УОС	1	14.05	
164.	<b>Промежуточная аттестация. Контрольная работа № 14</b>	УОС	1	16.05	
165.	Элементы теории вероятностей	УОС	1	17.05	
166.	Решение задач ЕГЭ	УОС	1	20.05	
167.	Элементы теории вероятностей	УОС	1	20.05	
168.	Решение задач ЕГЭ	УОС	1	21.05	
169.	<b>Итоговая контрольная работа № 15</b>	УОС	1	23.05	
170.	Анализ работы	УОС	1	24.05	

УИНМ	Урок изучения нового материала
УСЗУН	Урок совершенствования знаний, умений и навыков
УОС	Урок обобщения и систематизации
УКЗУН	Урок контрольная: учета и оценки знаний , умений и навыков
КУ	Комбинированный урок

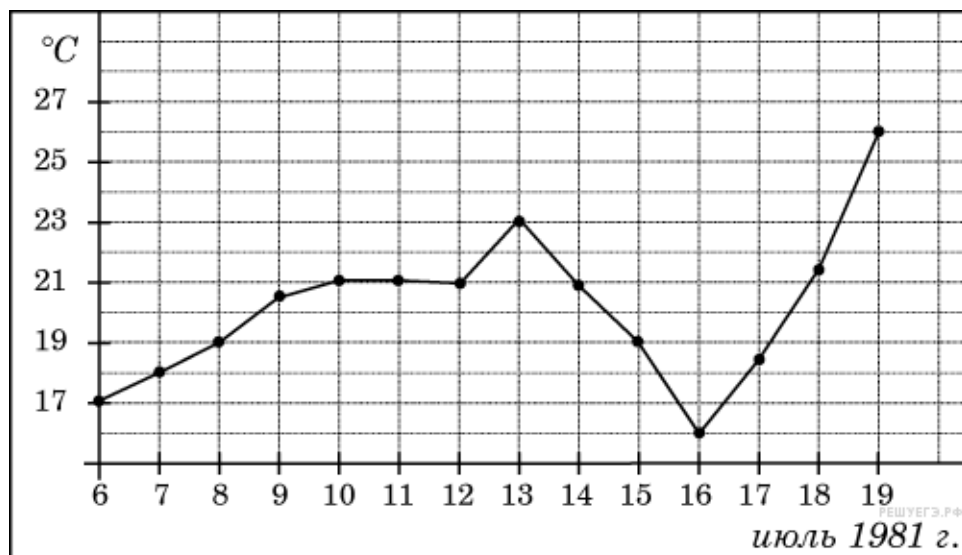
# **ПРИЛОЖЕНИЕ**

# Контрольная работа №1 Входная

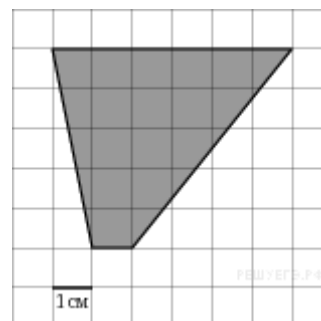
1 вариант

В1. Шоколадка стоит 35 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три (одну в подарок). Сколько шоколадок можно получить на 200 рублей в воскресенье?

В2. На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Бресте каждый день с 6 по 19 июля 1981 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей среднесуточными температурами за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.



В3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.



В4. Для транспортировки 45 тонн груза на 1300 км можно воспользоваться услугами одной из трех фирм-перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъемность автомобилей для каждого перевозчика указана в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую перевозку?

Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъемность автомобилей (тонн)
А	3200	3,5
Б	4100	5
В	9500	12

В5. Найдите корень уравнения  $\sqrt{15 - 2x} = 3$ .



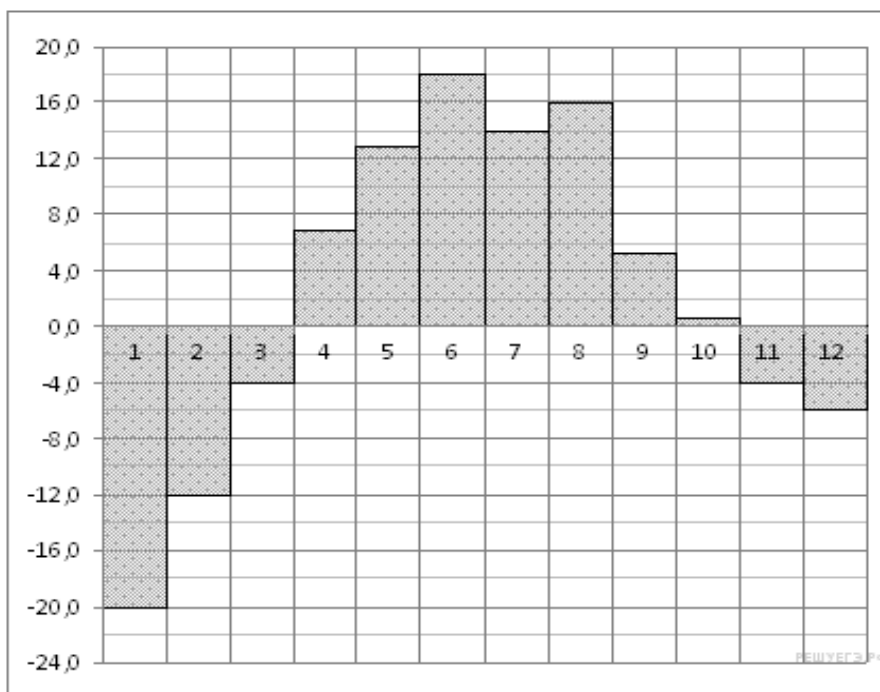
В6. Найдите наименьшее значение функции  $y = x^3 - 27x$  на отрезке  $[0; 4]$ .

С1. Решите уравнение  $\frac{\cos 2x + \sin x}{\sqrt{\sin(x - \frac{\pi}{4})}} = 0$ .

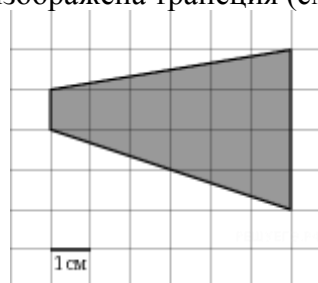
2 вариант

В1. Сырок стоит 7 рублей 20 копеек. Какое наибольшее число сырков можно купить на 60 рублей?

В2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами в 1973 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



В3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рисунок).



Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.

В4. Для изготовления книжных полок требуется заказать 48 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла  $0,25 \text{ м}^2$ . В таблице приведены цены на стекло, а также на резку стекол и шлифовку края. Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м <sup>2</sup> )	Резка и шлифовка (руб. за одно стекло)
A	420	75
B	440	65
B	470	55

B5. Найдите корень уравнения  $\sqrt{3x-8} = 5$ .  
 Ответ: 11

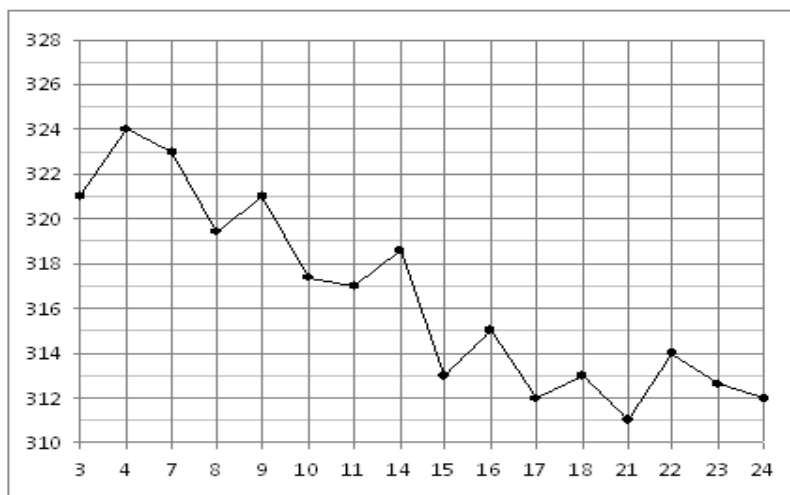
B6. Найдите наибольшее значение функции  $y = x^3 - 3x + 4$  на отрезке  $[-2; 0]$ .

C1. Решите уравнение  $\sqrt{9-x^2} \cos x = 0$ .

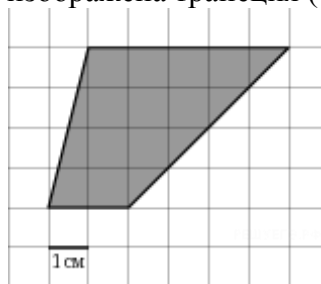
3 вариант

B1. На день рождения полагается дарить букет из нечетного числа цветов. Тюльпаны стоят 30 рублей за штуку. У Вани есть 500 рублей. Из какого наибольшего числа тюльпанов он может купить букет Маше на день рождения?

B2. На рисунке жирными точками показана цена золота на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 3 по 24 октября 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена унции золота в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой золота на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за унцию).



В3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рисунок).



Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.

В4. Клиент хочет арендовать автомобиль на сутки для поездки протяженностью 500 км. В таблице приведены характеристики трех автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешевый вариант?

Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за 1 сутки)
А	Дизельное	7	3700
Б	Бензин	10	3200
В	Газ	14	3200

Цена дизельного топлива — 19 рублей за литр, бензина — 22 рублей за литр, газа — 14 рублей за литр.

В5. Решите уравнение  $\sqrt{6+5x} = x$ . Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

В6. Найдите точку максимума функции  $y = x^3 - 3x^2 + 2$ .

С1. Решите уравнение  $6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0$ . Укажите его корни, принадлежащие отрезку  $[-\pi; 2\pi]$ .

Ответы:

Вариант	В1	В2	В3	В4	В5	В6
1 вариант	7	10	17,5	479 700	3	-54
2 вариант	8	38	15	8280	11	6
3 вариант	15	13	14	4180	6	0

Решение С1. 1 вариант

Найдем область определения уравнения:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \Leftrightarrow 2\pi n < x - \frac{\pi}{4} < \pi + 2\pi n \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Найдем корни числителя, используем формулу  $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ .

$$\cos 2x + \sin x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin x = -0,5. \end{cases}$$

С учетом области определения уравнения получаем:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

**Решение С1 (2 вар).**

$$\sqrt{9-x^2} \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{9-x^2} = 0, \\ \cos x = 0, \\ 9-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ -3 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3, \\ x = \pm \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Ответ:  $\pm 3; \pm \frac{\pi}{2}$ .

**Решение С1. (3 вар)**

Сделаем замену  $\cos x = y$ , получим квадратное уравнение  $6y^2 - 7y - 5 = 0$ , корнями которого являются числа  $-\frac{1}{2}$  и  $\frac{5}{3}$ . Уравнение  $\cos x = \frac{5}{3}$  не имеет решений, а из уравнения  $\cos x = -\frac{1}{2}$  находим искомые корни:

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$$

или  $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$ .

Найдем корни, принадлежащие отрезку  $[-\pi; 2\pi]$ . Решим неравенства:

$$-\pi \leq -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq n \leq 1\frac{2}{3} \Leftrightarrow n = 0 \text{ или } n = 1;$$

$$-\pi \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{6} \leq k \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow k = 0.$$

Соответствующие найденным значениям параметров корни:  $-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$  и  $\frac{4\pi}{3}$ .

Ответ:  $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, k, n \in \mathbb{Z}$ . Заданному отрезку принадлежат корни  $-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$  и  $\frac{4\pi}{3}$ .

### Входная контрольная работа. Вариант 1

1. Решите уравнение:

а)  $\sqrt{1-x} = x+1$  б)  $4^x + 2^x - 20 = 0$

в)  $\log_5(2x-1) = 2$  г)  $\sqrt{2} \cos x - 1 = 0$

2. Решите неравенство:

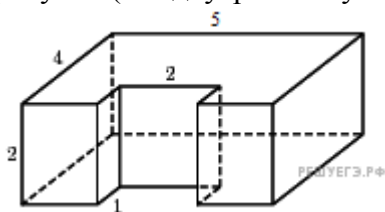
а)  $9^x - 7 \cdot 3^x - 18 < 0$

б)  $\log_{\frac{1}{6}}(10-x) + \log_{\frac{1}{6}}(x-3) \geq -1$

3. Вычислите:  $(\frac{94 \cdot 93}{12 \cdot 9})^3$ ;  $\arcsin(-0,5) - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$

4. Железнодорожный билет для взрослого стоит 840 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 18 школьников и 3 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

5. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые)



6. Найдите  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$  и  $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$

7. Решите уравнение  $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} = -1$ . В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

### Входная контрольная работа. Вариант 2.

1. Решите уравнение:

а)  $\sqrt{x+1} = 1-x$  б)  $9^x - 7 \cdot 3^x - 18 = 0$

в)  $\log_4(2x+3) = 3$  г)  $\sqrt{2} \sin x - 1 = 0$

2. Решите неравенство:

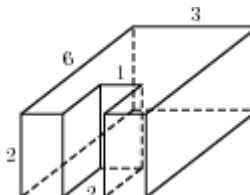
а)  $4^x + 2^x - 20 > 0$

б)  $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) + \log_{\frac{1}{2}}(9-x) \geq -3$

3. Вычислите  $5^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{7}{3}}$ ;  $-18\sqrt{2} \sin(-135^\circ)$

4. В пачке бумаги 250 листов формата А 4. За неделю расходуется 700 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 8 недель?

5. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые)



6. Найдите  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\sin \alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$  и  $\alpha \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$

7. Решите уравнение  $\operatorname{tg} \frac{\pi(x+2)}{3} = -\sqrt{3}$ . В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

### Контрольная работа № 2. ТЕМА: Тригонометрические функции

1 вариант	2 вариант
1. Найти область определения функции 1) $y = 2 \sin x + 3$ 3) $y = \sqrt{2 \cos x - 1}$ 2) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$ 4) $y = \frac{2}{2 \sin^2 x + \sin x}$	1. Найти область определения функции 1) $y = 2 - 3 \cos x$ 3) $y = \sqrt{2 \sin x - 1}$ 2) $y = \operatorname{tg} 4x$ 4) $y = \frac{2}{2 \cos^2 x + \cos x}$
2. Найти область значений функции 1) $y = 2 - 3 \cos 4x$ 2) $y = \sin x \cos x - 1$	2. Найти область значений функции 1) $y = 3 - 2 \sin 5x$ 2) $y = \cos^2 x - \sin^2 x + 1$
3. Исследовать функцию на четность 1) $y = 5 \sin x - x$ 2) $y = 2x^2 + \operatorname{tg} x - 2$	3. Исследовать функцию на четность 1) $y = 5 \cos x - x^2 + 3$ 2) $y = 2x - \cos x \operatorname{tg} x$
4. Найти наименьший положительный период функции 1) $y = 2 \cos 3x$ 2) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{6}$	4. Найти наименьший положительный период функции 1) $y = 2 \cos \frac{x}{2}$ 2) $y = \operatorname{tg} 4x$
5. Найти все корни уравнения,	5. Найти все корни уравнения,

<p>принадлежащие отрезку</p> $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, [0; \pi]$ <p>6. Построить график функции</p> $1) y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$	<p>принадлежащие отрезку</p> $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, [0; \pi]$ <p>6. Построить график функции</p> $1) y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
---	---

**Контрольные работы по алгебре и началам анализа в 11 классе**  
**Контрольная работа № 1**  
по теме «Тригонометрические функции»

**Вариант 1**

1. Найдите область определения и множество значений функции  $y = 2 \cos x$ .
2. Выясните, является ли функция  $y = \sin x - \operatorname{tg} x$  четной или нечетной.
3. Изобразите схематически график функции  $y = \sin x + 1$  на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ .
4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $y = 3 \sin x \cdot \cos x + 1$ .
5. Постройте график функции  $y = 0,5 \cos x - 2$ . При каких значениях  $x$  функция возрастает? Убывает?

**Контрольные работы по алгебре и началам анализа в 11 классе**  
**Контрольная работа № 1**  
по теме «Тригонометрические функции»

**Вариант 2**

1. Найдите область определения и множество значений функции  $y = 0,5 \cos x$ .
2. Выясните, является ли функция  $y = \cos x - x^2$  четной или нечетной.
3. Изобразите схематически график функции  $y = \cos x - 1$  на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ .
4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $y = \frac{1}{3} \cos^2 x - \frac{1}{3} \sin^2 x + 1$ .
5. Постройте график функции  $y = 2 \sin x + 1$ . При каких значениях  $x$  функция возрастает? Убывает?

**Контрольная работа №3: «Координаты точки и координаты вектора»**

### I уровень

#### Вариант I

1. Найдите координаты вектора  $\overrightarrow{AB}$ , если  $A(5; -1; 3)$ ,  $B(2; -2; 4)$ .
2. Даны векторы  $\vec{b} \{3; 1; -2\}$  и  $\vec{c} \{1; 4; -3\}$ . Найдите  $|2\vec{b} - \vec{c}|$ .
3. Изобразить систему координат  $Oxyz$  и построить точку  $A(1; -2; -4)$ . Найдите расстояние от этой точки до координатных плоскостей.

#### Вариант II

1. Найдите координаты вектора  $\overrightarrow{CD}$ , если  $C(6; 3; -2)$ ,  $D(2; 4; -5)$ .
2. Даны векторы  $\vec{a} \{5; -1; 2\}$  и  $\vec{b} \{3; 2; -4\}$ . Найдите  $|\vec{a} - 2\vec{b}|$ .
3. Изобразить систему координат  $oxyz$  и построить точку  $B(-2; -3; 4)$ . Найдите расстояние от этой точки до координатных плоскостей.

### Ответы на задания I уровня сложности

Вариант I. 1)  $\overrightarrow{AB} \{-3; -1; 1\}$ ; 2)  $\sqrt{30}$ ; 3)  $4; 2; 1$ ;

Вариант II. 1)  $\overrightarrow{CD} \{-4; 1; -3\}$ ; 2)  $3\sqrt{14}$ ; 3)  $4; 3; 2$ .

### II уровень

#### Вариант I

1. Вершины  $\triangle ABC$  имеют координаты  $A(-2; 0; 1)$ ,  $B(-1; 2; 3)$ ,  $C(8; -4; 9)$ . Найдите координаты вектора  $\overrightarrow{BM}$ , если  $BM$  – медиана  $\triangle ABC$ .
2. Дан вектор  $\vec{a} \{-6; 4; 12\}$ . Найдите координаты  $\vec{b}$ , если  $|\vec{b}| = 7$  и векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  сонаправлены.
3. Даны точки  $A(-1; 5; 3)$ ,  $B(7; -1; 3)$ ,  $C(3; -2; 6)$ . Доказать, что  $\triangle ABC$  – прямоугольный.

#### Вариант II

1. Вершины  $\triangle ABC$  имеют координаты:  $A(-1; 2; 3)$ ,  $B(1; 0; 4)$ ,  $C(3; -2; 1)$ . Найдите координаты вектора  $\overrightarrow{AM}$ , если  $AM$  – медиана  $\triangle ABC$ .
2. Дан вектор  $\vec{a} \{-6; 4; 12\}$ . Найдите координаты  $\vec{b}$ , если  $|\vec{b}| = 28$  и векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  противоположно-направлены.
3. Даны точки  $A(-1; 5; 3)$ ,  $B(-1; 3; 9)$ ,  $C(3; -2; 6)$ . Доказать, что  $\triangle ABC$  – прямоугольный.

**Ответы на задания 2 уровня сложности**



### Вариант I

1) Дано:  $\triangle ABC$ ;  $M, N, K$  – середины сторон соответственно  $AB, BC, AC$ .  
 $M(3; -2; 5), N(3,5; -1; 6), K(-1,5; 1; 2)$ .

Найти: координаты  $A, B, C$ .

Пусть  $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2), C(x_3; y_3; z_3)$ . По формулам координат середины отрезка составим системы для абсцисс, ординат и аппликат.

Пользуясь методом сложения, решим эту систему:

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ x_2 + x_3 = 7, \\ x_3 + x_1 = -3; \end{cases} \begin{cases} x_1 - x_3 = -1, \\ x_1 + x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 = 6; \end{cases} \begin{cases} 2x_1 = -4, \\ x_1 + x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 = 6; \end{cases} \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = 8, \\ x_3 = -1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y_1 + y_2 = -4, \\ y_2 + y_3 = -2, \\ y_3 + y_1 = 2; \end{cases} \begin{cases} y_1 - y_3 = -2, \\ y_1 + y_3 = 2, \\ y_1 + y_2 = -4; \end{cases} \begin{cases} 2y_1 = 0, \\ y_1 - y_3 = -2, \\ y_1 + y_2 = -4; \end{cases} \begin{cases} y_1 = 0, \\ y_2 = -4, \\ y_3 = 2; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} z_1 + z_2 = 10, \\ z_2 + z_3 = 12, \\ z_3 + z_1 = 4; \end{cases} \begin{cases} z_1 - z_3 = -2, \\ z_1 + z_3 = 4, \\ z_1 + z_2 = 10; \end{cases} \begin{cases} 2z_1 = 2, \\ z_1 + z_2 = 10, \\ z_1 + z_3 = 4; \end{cases} \begin{cases} z_1 = 1, \\ z_2 = 9, \\ z_3 = 3. \end{cases}$$

(Ответ:  $A(-2; 0; 1), B(8; -4; 9), C(-1; 2; 3)$ .)

2) Дано:  $A(-2; 1; 2), B(-6; 3; -2), C \in$  оси  $OZ; AC = BC$ .

Найти: координаты точки  $C$ .

Решение: По условию  $C \in$  оси  $OZ$ , значит она имеет координаты  $C(0; 0; z)$  и  $AC = BC$ . Составим уравнение, пользуясь формулой расстояния между двумя точками:  $4 + 1 + (z - 2)^2 = 36 + 9 + (z + 2)^2$ ,  $5 + z^2 - 4z + 4 = 45 + z^2 + 4z + 4$ ,  $-8z = 40; z = -5$ . (Ответ:  $(0; 0; -5)$ .)

3) Дано:  $A(-2; 1; 2), B(-6; 3; -2), C(0; 0; -5); AC = BC$ .

Найти:  $S_{\triangle ABC}$

Решение: По формуле координат середины отрезка  $AB$  найдем координаты точки  $M$  – середины:  $M\left(\frac{-6-2}{2}; \frac{1+3}{2}; \frac{2-2}{2}\right), M(-4; 2; 0)$ .

$AB = \sqrt{(-6+2)^2 + (3-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$ ,  $CM$  – высота равнобедренного  $\triangle ABC$ .  $CM = \sqrt{16+4+25} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ .  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CM$ ;

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{5} = 9\sqrt{5}$ . (Ответ:  $9\sqrt{5}$ .)

### Вариант II

1) Дано:  $\triangle ABC$ ;  $A(-1; 2; 3)$ ,  $B(1; 0; 4)$ ,  $C(3; -2; 1)$ .  $AM$  – медиана.

Найти: координаты вектора  $\overrightarrow{AM}$ .

Решение: По определению медианы  $M$  – середина  $BC$ .

Координаты точки  $M$  найдем по формулам координат середины отрезка.

$$M\left(\frac{3+1}{2}; \frac{0+2}{2}; \frac{4+1}{2}\right), \quad M(2; -1; 2,5). \quad \overrightarrow{AM} \{2+1; -1-2; 2,5-3\},$$

$$\overrightarrow{AB} \{3; -3; -0,5\}. \quad (\text{Ответ: } \{3; -3; -0,5\}.)$$

2) Дано:  $|\vec{b}| = 28$ ,  $\vec{a} \{-6; 4; 12\}$ ;  $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$

Найти: координаты вектора  $\vec{b}$ .

Решение: По условию  $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b} \Rightarrow \vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны, поэтому координаты вектора  $\vec{b}$  пропорциональны координатам вектора  $\vec{a}$ , то есть  $\vec{b} \{-6k; 4k; 12k\}$ .

По условию  $|\vec{b}| = 28$ , составим уравнение:  $36k^2 + 16k^2 + 144k^2 = 784$ ,

$$196k^2 = 784, \quad k^2 = \frac{784}{196}, \quad k^2 = \left(\frac{28}{14}\right)^2, \quad k = \pm 2. \quad \text{По условию } \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b} \Rightarrow k = -2.$$

Значит, вектор  $\vec{b}$  имеет координаты  $\vec{b} \{12; -8; -24\}$ . (Ответ:  $\{12; -8; -24\}$ .)

3) Дано:  $A(-1; 5; 3)$ ,  $B(-1; -3; 9)$ ,  $C(3; -2; 6)$ .

Доказать:  $\triangle ABC$  – прямоугольный.

Доказательство: По формуле расстояния между двумя точками найдем длины отрезков  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$ .  $AB^2 = (-1+1)^2 + (5+3)^2 + (3-9)^2$ ;  $AB^2 = 64 + 36$ ;  $AB^2 = 100$ ,  $AC^2 = (3+1)^2 + (-2-5)^2 + (6-3)^2$ ;  $AC^2 = 16 + 49 + 9$ ;  $AC^2 = 74$ ,  $BC^2 = (3+1)^2 + (-2+3)^2 + (6-9)^2$ ;  $BC^2 = 16 + 1 + 9$ ;  $BC^2 = 26$ .

Проверим равенство  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ .  $100 = 76 + 26$ , верно. По теореме обратной теореме Пифагора делаем вывод, что  $\triangle ABC$  – прямоугольный с гипотенузой  $AB$ .

### III уровень

#### Вариант I

1. Середины сторон  $\triangle ABC$  имеют координаты:  $M(3; -2; 5)$ .  $N(3,5; -1; 6)$ .  $K(-1,5; 1; 2)$ . Найдите координаты вершин  $\triangle ABC$ .
2. Даны точки  $A(-2; 1; 2)$ ,  $B(-6; 3; -2)$  на оси аппликат. Найдите точку  $C$ , равноудаленную от точек  $A$  и  $B$ .
3. Найдите площадь  $\triangle ABC$ .

#### Вариант II

1. Середины сторон  $\triangle ABC$  имеют координаты:  $M(3; -2; -4)$ .  $N(-6; 4; -10)$ .  $K(-7; 2; -12)$ . Найдите координаты вершин  $\triangle ABC$ .
2. Даны точки  $A(4; 5; 4)$ ,  $B(2; 3; -4)$  на оси абсцисс. Найдите точку  $C$ , равноудаленную от точек  $A$  и  $B$ .
3. Найдите площадь  $\triangle ABC$ .

**Вариант I**

1) Дано:  $\triangle ABC$ ;  $M, N, K$  – середины сторон соответственно  $AB, BC, AC$ .  
 $M(3; -2; 5), N(3,5; -1; 6), K(-1,5; 1; 2)$ .

Найти: координаты  $A, B, C$ .

Пусть  $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2), C(x_3; y_3; z_3)$ . По формулам координат середины отрезка составим системы для абсцисс, ординат и аппликат.

Пользуясь методом сложения, решим эту систему:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ x_2 + x_3 = 7, \\ x_3 + x_1 = -3; \end{cases} \begin{cases} x_1 - x_3 = -1, \\ x_1 + x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 = 6; \end{cases} \begin{cases} 2x_1 = -4, \\ x_1 + x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 = 6; \end{cases} \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = 8, \\ x_3 = -1; \end{cases} \\ 2) \quad & \begin{cases} y_1 + y_2 = -4, \\ y_2 + y_3 = -2, \\ y_3 + y_1 = 2; \end{cases} \begin{cases} y_1 - y_3 = -2, \\ y_1 + y_3 = 2, \\ y_1 + y_2 = -4; \end{cases} \begin{cases} 2y_1 = 0, \\ y_1 - y_3 = -2, \\ y_1 + y_2 = -4; \end{cases} \begin{cases} y_1 = 0, \\ y_2 = -4, \\ y_3 = 2; \end{cases} \\ 3) \quad & \begin{cases} z_1 + z_2 = 10, \\ z_2 + z_3 = 12, \\ z_3 + z_1 = 4; \end{cases} \begin{cases} z_1 - z_3 = -2, \\ z_1 + z_3 = 4, \\ z_1 + z_2 = 10; \end{cases} \begin{cases} 2z_1 = 2, \\ z_1 + z_2 = 10, \\ z_1 + z_3 = 4; \end{cases} \begin{cases} z_1 = 1, \\ z_2 = 9, \\ z_3 = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

(Ответ:  $A(-2; 0; 1), B(8; -4; 9), C(-1; 2; 3)$ .)

2) Дано:  $A(-2; 1; 2), B(-6; 3; -2), C \in \text{оси } OZ; AC = BC$ .

Найти: координаты точки  $C$ .

Решение: По условию  $C \in \text{оси } OZ$ , значит она имеет координаты  $C(0; 0; z)$  и  $AC = BC$ . Составим уравнение, пользуясь формулой расстояния между двумя точками:  $4 + 1 + (z - 2)^2 = 36 + 9 + (z + 2)^2$ ,  $5 + z^2 - 4z + 4 = 45 + z^2 + 4z + 4$ ,  $-8z = 40$ ;  $z = -5$ . (Ответ:  $(0; 0; -5)$ .)

3) Дано:  $A(-2; 1; 2), B(-6; 3; -2), C(0; 0; -5); AC = BC$ .

Найти:  $S_{\triangle ABC}$

Решение: По формуле координат середины отрезка  $AB$  найдем координаты точки  $M$  – середины:  $M\left(\frac{-6-2}{2}; \frac{1+3}{2}; \frac{2-2}{2}\right)$ ,  $M(-4; 2; 0)$ .

$AB = \sqrt{(-6+2)^2 + (3-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$ ,  $CM$  – высота равнобедренного  $\triangle ABC$ .  $CM = \sqrt{16+4+25} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ .  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CM$ ;

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{5} = 9\sqrt{5}$ . (Ответ:  $9\sqrt{5}$ .)

### Вариант II

1. Дано:  $\triangle ABC$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $K$  – середины сторон соответственно  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$ .  
 $M(3; -2; -4)$ ,  $N(-6; 4; -10)$ ,  $K(-7; 2; -12)$ .

Найти: координаты вершин  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

Решение: Пусть  $A(x_1; y_1; z_1)$ ,  $B(x_2; y_2; z_2)$ ,  $C(x_3; y_3; z_3)$ . По формулам координат середины отрезка составим системы для абсцисс, ординат и аппликат.

При решении системы использован метод сложения.

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ x_2 + x_3 = -12, \\ x_3 + x_1 = -14; \end{cases} \begin{cases} x_1 - x_3 = 18, \\ x_1 + x_3 = -14, \\ x_1 + x_2 = 6; \end{cases} \begin{cases} 2x_1 = 4, \\ x_1 + x_3 = -14, \\ x_1 + x_2 = 6; \end{cases} \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 4, \\ x_3 = -16. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y_1 + y_2 = -4, \\ y_2 + y_3 = 8, \\ y_3 + y_1 = 4; \end{cases} \begin{cases} y_1 - y_3 = -12, \\ y_1 + y_3 = 4, \\ y_1 + y_2 = -4; \end{cases} \begin{cases} 2y_1 = -8, \\ y_1 + y_3 = 4, \\ y_1 + y_2 = -4; \end{cases} \begin{cases} y_1 = -4, \\ y_2 = 0, \\ y_3 = 8; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} z_1 + z_2 = -8, \\ z_2 + z_3 = -20, \\ z_1 + z_3 = -24; \end{cases} \begin{cases} z_1 - z_3 = 12, \\ z_2 + z_3 = -20, \\ z_1 + z_3 = -24; \end{cases} \begin{cases} 2z_1 = -12, \\ z_2 + z_3 = -20, \\ z_1 + z_3 = -24; \end{cases} \begin{cases} z_1 = -6, \\ z_2 = -2, \\ z_3 = -18. \end{cases}$$

(Ответ:  $A(2; -4; -6)$ ,  $B(4; 0; -2)$ ,  $C(-16; 8; -18)$ .)

2. Дано:  $A(4; 5; 4)$ ,  $B(2; 3; -4)$ ;  $C \in$  оси  $OX$ ,  $AC = BC$ .

Найти: координаты точки  $C$ .

Решение: По условию  $C \in$  оси  $OX$ , значит она имеет координаты  $C(x; 0; 0)$  и  $AC = BC$ . Составим уравнение, пользуясь формулой расстояния между двумя точками:  $(x-4)^2 + 25 + 16 = (x-2)^2 + 9 + 16$ ,  $x^2 - 8x + 16 + 25 + 16 = x^2 - 4x + 4 + 9 + 16$ ,  $-4x = -28$ ,  $x = 7$ . (Ответ:  $7; 0; 0$ .)

3. Дано:  $A(4; 5; 4)$ ,  $B(2; 3; -4)$ ,  $C(7; 0; 0)$ ,  $AC = BC$ .

Найти:  $S_{\triangle ABC}$ .

Решение: Пусть точка  $M$  – середина основания равнобедренного  $\triangle ABC$ , то есть отрезка  $AB$ . Тогда точка  $M$  имеет координаты:  $M(3; 4; 0)$ .

$AB = \sqrt{(2-4)^2 + (3-5)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{4+4+64} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ ,  $CM$  – высота

$\triangle ABC$ .  $CM = \sqrt{(7-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ .  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CM$ ;

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 24$ . (Ответ: 24.)

## Контрольная работа № 4. ТЕМА: Производная и ее геометрический смысл

1 вариант	2 вариант
<p>1. Найти производную функции</p> <p>1) <math>y = 5x^4 + x^8 - \cos x</math></p> <p>2) <math>y = 6\operatorname{tg} x - \sqrt{x} + \frac{\sin x}{4} - 7</math></p> <p>3) <math>y = 2\log_4 x + \frac{3e^x}{8} - \sqrt{4}</math></p> <p>4) <math>y = \frac{x^2 - 3x}{5 + x^2}</math></p> <p>5) <math>y = 2^x \ln x</math></p> <p>6) <math>y = \log_5 \left( \frac{x^2}{2} - 3x^3 + 4 \right)</math></p> <p>7*) <math>y = \cos \left( \sqrt{\frac{1}{\operatorname{ctg}(4x^4 - 1)}} \right)</math></p> <p>2. Найти тангенс угла наклона к оси x касательной к графику ф-ции <math>f(x) = 3x^2 - 12x + 5</math> в точке <math>x_0 = -1</math>.</p> <p>3. Составить уравнение касательной к графику функции <math>y = 4x - \frac{x^3}{3}</math> в точке <math>x_0 = 3</math>.</p> <p>4. Составить уравнение касательной к графику функции <math>f(x) = 0,2x^2 + 4x - 5</math>, которая параллельна прямой <math>6x - y - 3 = 0</math>.</p>	<p>1. Найти производную функции</p> <p>1) <math>y = x^3 - 2x^{10} - \sqrt{9}</math></p> <p>2) <math>y = \frac{1}{x} + 3\operatorname{ctg} x - 3 + \frac{\cos x}{7}</math></p> <p>3) <math>y = 2 \ln x - \frac{5^x}{3} - \operatorname{tg} x</math></p> <p>4) <math>y = \frac{x^3 + 2}{x - x^5}</math></p> <p>5) <math>y = (x^2 - 1) \log_2 x</math></p> <p>6) <math>y = \left( 5 + x^8 - \frac{2x^3}{3} \right)^{10}</math></p> <p>7*) <math>y = \lg \left( \sin \left( \frac{1}{\operatorname{tg}(5x - x^3)} \right) \right)</math></p> <p>2. Найти тангенс угла наклона к оси x касательной к графику ф-ции <math>f(x) = 2x^2 + 8x - 3</math> в точке <math>x_0 = -3</math>.</p> <p>3. Составить уравнение касательной к графику функции <math>y = x^2 - 2x - 3</math> в точке <math>x_0 = -2</math>.</p> <p>4. Составить уравнение касательной к графику функции <math>f(x) = x^2 - x + 3</math>, которая параллельна прямой <math>x + y + 3 = 0</math>.</p>

## Контрольная работа № 4 по теме «Производная и ее геометрический смысл»

### Вариант 1

- Найдите производную функции: а)  $3x^2 - \frac{1}{x^2}$ ; б)  $\left(\frac{x}{3} + 7\right)^6$ ; в)  $e^x \cos x$ ; г)  $\frac{2^x}{\sin x}$ .
- Найдите значение производной функции  $f(x) = 1 - 6\sqrt[3]{x}$  в точке  $x_0 = 8$ .
- Запишите уравнение касательной к графику функции  $f(x) = \sin x - 3x + 2$  в точке  $x_0 = 0$ .
- Найдите значения x, при которых значения производной функции  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$  положительны.
- Найдите точки графика функции  $f(x) = x^3 - 3x^2$ , в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс.
- Найдите производную функции  $f(x) = \log_3(\sin x)$ .

## Контрольная работа № 2 по теме «Производная и ее геометрический смысл»

### Вариант 2

- Найдите производную функции: а)  $2x^3 - \frac{1}{x^2}$ ; б)  $(4 - 3x)^6$ ; в)  $e^x \cdot \sin x$ ; г)  $\frac{3^x}{\cos x}$ .
- Найдите значение производной функции  $f(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$  в точке  $x_0 = \frac{1}{4}$ .
- Запишите уравнение касательной к графику функции  $f(x) = 4x - \sin x + 1$  в точке  $x_0 = 0$ .
- Найдите значения x, при которых значения производной функции  $f(x) = \frac{1-x}{x^2+8}$  отрицательны.
- Найдите точки графика функции  $f(x) = x^3 + 3x^2$ , в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс.
- Найдите производную функции  $f(x) = \cos(\log_2 x)$ .

## Контрольная работа №6 Тема: Цилиндр, конус и шар

### I уровень сложности

#### Вариант 1

1. Радиус основания цилиндра равен 5 см, а высота цилиндра равна 6 см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 см от нее.
2. Радиус шара равен 17 см. Найдите площадь сечения шара, удаленного от его центра на 15 см.
3. Радиус основания конуса равен 3 м, а высота 4 м. Найти образующую и площадь осевого сечения.

#### Вариант 2

1. Высота цилиндра 8 дм, радиус основания 5 дм. Цилиндр пересечен плоскостью параллельно оси так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от этого сечения до оси цилиндра.
2. Радиус сферы равен 15 см. Найдите длину окружности сечения, удаленного от центра сферы на 12 см.
3. Образующая конуса  $l$  наклонена к плоскости основания под углом в  $30^\circ$ . Найти высоту конуса и площадь осевого сечения.

### II уровень сложности

#### Вариант 1

1. Осевое сечение цилиндра — квадрат, диагональ которого 4 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
2. Радиус основания конуса равен 6 см, а образующая наклонена к плоскости основания под углом  $60^\circ$ . Найдите площадь сечения, проходящего через две образующие, угол между которыми равен  $45^\circ$  и площадь боковой поверхности конуса.
3. Диаметр шара равен  $d$ . Через конец диаметра проведена плоскость под углом  $45^\circ$  к нему. Найдите площадь сечения шара этой плоскостью.

#### Вариант 2

1. Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь основания цилиндра равна  $16\pi \text{ см}^2$ . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
2. Высота конуса равна 6 см, угол при вершине осевого сечения равен  $90^\circ$ . Найдите площадь боковой поверхности конуса.
3. Площадь сечения шара плоскостью, проведенной через конец диаметра под углом  $30^\circ$  к нему, равна  $75\pi \text{ см}^2$ . Найдите диаметр шара.

### III уровень сложности

#### Вариант 1

1. Длина линии пересечения сферы и плоскости, проходящей через конец диаметра под углом  $60^\circ$  к нему, равна  $5\pi \text{ см}^2$ . Найдите диаметр сферы.
2. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая основание по хорде, длина которой равна 5 см, и стягивающей дугу  $90^\circ$ . Плоскость сечения составляет с плоскостью основания угол  $60^\circ$ . Найдите площадь боковой поверхности конуса.
3. Плоскость, проходящая через центр нижнего основания цилиндра под углом  $\alpha$  к основанию, пересекает верхнее основание по хорде, равной  $b$  и стягивающей дугу  $\beta$ . Найдите высоту цилиндра.

#### Вариант 2

1. Диаметр шара равен  $d$ . Через конец диаметра проведена плоскость под углом  $30^\circ$  к нему. Найдите длину линии пересечения сферы и плоскости.
2. В цилиндре проведена плоскость, параллельная оси и отсекающая от окружности основания дугу в  $120^\circ$ . Диагональ сечения равна 20 см и удалена от оси на 3 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
3. В конусе проведено сечение плоскостью, проходящей через вершину конуса. Найдите его площадь, если радиус конуса  $r$ , угол между сечением и основанием  $60^\circ$ , угол между образующей и основанием  $45^\circ$ .

### Ответы на задания I уровня сложности

Вариант	№ задачи	Ответ
<i>Вариант I</i>	1	$36 \text{ см}^2$
	2	$64\pi \text{ см}^2$
	3	5 м; 12 м
<i>Вариант II</i>	1	3 дм
	2	$18\pi \text{ см}$
	3	$0,5 \ell; 0,25 \ell^2 \sqrt{3}$

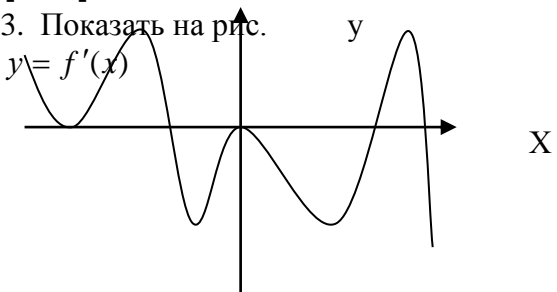
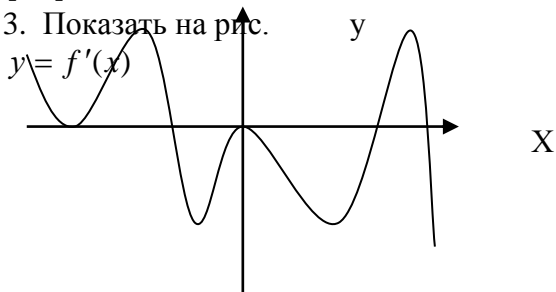
### Ответы на задания II уровня сложности

Вариант	№ задачи	Ответ
<i>Вариант I</i>	1	$8\pi \text{ см}^2$
	2	$36\sqrt{2} \pi \text{ см}^2, 72 \text{ см}^2$
	3	$\frac{1}{8} \pi d^2 \text{ см}^2$
<i>Вариант II</i>	1	$64\pi \text{ см}^2$
	2	$36\sqrt{2}\pi \text{ см}^2$
	3	20 см

### Ответы на задания III уровня сложности

Вариант	№ задачи	Ответ
<i>Вариант I</i>	1	10 см
	2	$\frac{25\sqrt{10}\pi}{4} \text{ см}^2$
	3	$\frac{1}{2} b \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta / 2.$
<i>Вариант II</i>	1	$\frac{\pi d \sqrt{3}}{2} \text{ см}$
	2	$24 \sqrt{73} \pi \text{ см}^2$
	3	$\frac{2}{3} r^2 \sqrt{2} \text{ кв. ед.}$

## Контрольная работа №7 . ТЕМА: Применение производной к исследованию функций

1 вариант	2 вариант
<p>1. Исследовать ф-цию на монотонность и точки экстремума</p> <p>1) <math>y = x^3 + 6x^2</math> 2) <math>y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}</math></p> <p>2. Найти наибольшее и наименьшее значение ф-ции на промежутке <math>y = x - \frac{1}{3}x^3</math>, <math>[-2; 0]</math>.</p> <p>3. Показать на рис.</p>  <p>1) Ск. промежутков возрастания у ф-ции <math>y = f(x)</math>?</p> <p>2) Ск. точек минимума у ф-ции <math>y = f(x)</math>?</p> <p>4. Исследовать ф-цию и построить ее график <math>y = x^4 - 4x^2</math>.</p>	<p>1. Исследовать ф-цию на монотонность и точки экстремума</p> <p>1) <math>y = 12x - x^3</math> 2) <math>y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}</math></p> <p>2. Найти наибольшее и наименьшее значение ф-ции на промежутке <math>y = \frac{1}{3}x^3 - 4x</math>, <math>[0; 3]</math>.</p> <p>3. Показать на рис.</p>  <p>1) Ск. промежутков убывания у ф-ции <math>y = f(x)</math>?</p> <p>2) Ск. точек максимума у ф-ции <math>y = f(x)</math>?</p> <p>4. Исследовать ф-цию и построить ее график <math>y = x^3 - 3x</math>.</p>

### Контрольная работы № 7

#### По теме «Применение производной к исследованию функции»

##### Вариант 1

- Найдите стационарные точки функции  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$ .
- Найдите экстремумы функции: а)  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$ ; б)  $f(x) = e^x(2x - 3)$ .
- Найдите интервалы возрастания и убывания функции  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$ .
- Постройте график функции  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$  на отрезке  $[-1; 2]$ .
- Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$  на отрезке  $[0; 1.5]$ .
- Среди прямоугольников, сумма длин трех сторон которых равна 20, найдите прямоугольник наибольшей площади.

### Контрольная работа № 3

#### по теме «Применение производной к исследованию функций»

##### Вариант 2

- Найдите стационарные точки функции  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ .
- Найдите экстремумы функции: а)  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ ; б)  $f(x) = e^x(5 - 4x)$ .
- Найдите интервалы возрастания и убывания функции  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ .
- Постройте график функции  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$  на отрезке  $[-1; 2]$ .
- Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$  на отрезке  $[0; 1.5]$ .
- Найдите ромб с наибольшей площадью, если известно, что сумма длин его диагоналей равна 10.



### Контрольная работа № 8. ТЕМА: Первообразная и интеграл

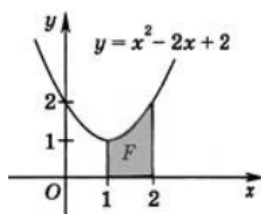
1 вариант	2 вариант
<p>1. Для функции <math>f(x) = 3x^2 - 1</math> найти первообразную, проходящую через точку <math>C(-1; 2)</math>.</p> <p>2. Найти интегралы</p> <p>1) <math>\int (x^2 - 3x - 1) dx</math></p> <p>2) <math>\int 3 \cos(2 - 3x) dx</math></p> <p>3) <math>\int (4^x - \frac{2}{x} + \sin x - 3x^8) dx</math></p> <p>4) <math>\int \left( \frac{1}{(2-3x)^2} + \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} - (2x-1)^7 \right) dx</math></p> <p>5) <math>\int_1^4 \left( 3x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx</math></p> <p>6) <math>\int_0^{\frac{\pi}{6}} 3 \sin 3x dx</math></p> <p>3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями</p> <p>а) <math>y = x^2 - 2x</math>, <math>y = x</math></p> <p>б) <math>y = x^2</math>, <math>y = 2x - x^2</math>, <math>y = 0</math></p>	<p>1. Для функции <math>f(x) = 4 - 6x^5</math> найти первообразную, проходящую через точку <math>C(1; -2)</math>.</p> <p>2. Найти интегралы</p> <p>1) <math>\int (2 - 5x^4 + x) dx</math></p> <p>2) <math>\int 6 \sin(2 - \frac{x}{3}) dx</math></p> <p>3) <math>\int \left( \frac{3}{x^2} + \frac{1}{\cos^2 x} - 6^x - \frac{5}{\sqrt{x}} \right) dx</math></p> <p>4) <math>\int \left( \cos(7x + 5) - (1 - 2x)^4 + \frac{3}{3x-5} \right) dx</math></p> <p>5) <math>\int_1^2 \left( 2x - \frac{1}{x^2} \right) dx</math></p> <p>6) <math>\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} dx</math></p> <p>3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями</p> <p>а) <math>y = x^2 + 2</math>, <math>y = 4 - x</math></p> <p>б) <math>y = x^3</math>, <math>y = 2x - x^2</math>, <math>y = 0</math></p>

### Контрольная работа № 4

по теме «Интеграл»

#### Вариант 1

- Докажите, что функция  $F(x) = 3x + \sin x - e^{2x}$  является первообразной функции  $f(x) = 3 + \cos x - 2e^{2x}$  на всей числовой оси.
- Найдите первообразную  $F$  функции  $f(x) = 2\sqrt{x}$ , график которой проходит через точку  $A(0; \frac{7}{8})$ .
- Вычислите площадь фигуры, изображенной на рисунке.



- 
4. Вычислить интеграл: а)  $\int_1^2 \left( x + \frac{2}{x} \right) dx$ ; б)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$ .

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямой  $y = 1 - 2x$  и графиком функции  $y = x^2 - 5x - 3$ .

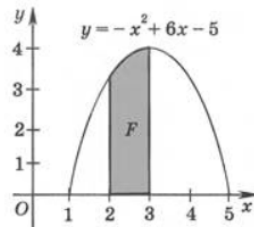
## Контрольная работа № 4

по теме «Интеграл»

### Вариант 2

1. Докажите, что функция  $F(x) = x + \cos x + e^{3x}$  является первообразной функции  $f(x) = 1 - \sin x + 3e^{3x}$  на всей числовой оси.

2. Найдите первообразную  $F$  функции  $f(x) = -3\sqrt[3]{x}$ , график которой проходит через точку  $A(0; \frac{3}{4})$ .



3. Вычислите площадь фигуры, изображенной на рисунке.

4. Вычислить интеграл: а)  $\int_1^3 (x^2 + \frac{3}{x}) dx$ ; б)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ .

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямой  $y = 3 - 2x$  и графиком функции  $y = x^2 + 3x - 3$ .

## Контрольная работа № 9

«Объем параллелепипеда, призмы, цилиндра и конуса»

### Вариант А 1.

1. Апофема правильной треугольной пирамиды равна 4 см, а двугранный угол при основании равен  $60^\circ$ . Найдите объем пирамиды.
2. В цилиндр вписана призма. Основанием призмы служит прямоугольный треугольник, катет которого равен  $2a$ , а прилежащий угол равен  $30^\circ$ . Диагональ большей боковой грани призмы составляет с плоскостью ее основания угол в  $45^\circ$ . Найдите объем цилиндра.

### Вариант А 2.

1. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 6 см и составляет с плоскостью основания угол в  $60^\circ$ . Найдите объем пирамиды.
2. В конус вписана пирамида. Основанием служит прямоугольный треугольник, катет которого равен  $2a$ , а прилежащий угол равен  $30^\circ$ . Боковая грань пирамиды, проходящая через данный катет, составляет с плоскостью основания угол в  $45^\circ$ . Найдите объем конуса.

### Вариант Б 1.

1. Основание прямого параллелепипеда ромб с периметром 40 см. Одна из диагоналей ромба равна 12 см. Найдите объем параллелепипеда, если его большая диагональ равна 20 см.
2. Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен  $\alpha$ , а боковое ребро равно  $l$ . Найдите объем конуса, вписанного в пирамиду.

### Вариант Б 2.

1. Основанием прямого параллелепипеда — ромб с периметром 40 см. Боковое ребро параллелепипеда равно 9, а одна из диагоналей 15 см. Найдите объем параллелепипеда.
2. Двугранный угол при основании правильной четырехугольной пирамиды равен  $\alpha$ . Высота пирамиды равна  $H$ . Найдите объем конуса, вписанного в пирамиду.

### Вариант В 1.

1. Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна  $l$  и образует с плоскостью основания пирамиды угол  $\alpha$ . Найдите объем пирамиды.
2. Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник с основанием  $a$  и углом при основании  $\alpha$ . Диагональ боковой грани, содержащей боковую сторону треугольника, наклонена к плоскости основания под углом  $\beta$ . Найдите объем цилиндра, вписанного в призму.

## Вариант В 2.

1. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 1 и наклонено к плоскости основания пирамиды под углом  $\alpha$ . Найдите объем пирамиды.
2. Основание прямой призмы равнобедренный треугольник с боковой стороной и углом при основании  $\alpha$ . Диагональ боковой грани, содержащей основание треугольника, образует с боковым ребром угла  $\beta$ . Найдите объем цилиндра, вписанного в призму.

### Ответы на все 6 вариантов

Вариант А<sub>1</sub>: № 1 –  $24 \text{ см}^3$ , № 2 –  $\frac{8a^3}{3\sqrt{3}}\pi$ .

Вариант А<sub>2</sub>: № 1 –  $\frac{81}{4} \text{ см}^2$ , № 2 –  $\frac{\pi a^3}{\cos^2 \alpha}$ .

Вариант Б<sub>1</sub>: № 1 –  $1152 \text{ см}^3$ , № 2 –  $\frac{\pi l^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{6}$ .

Вариант Б<sub>2</sub>: № 1 –  $864 \text{ см}^3$ , № 2 –  $\frac{\pi H^3}{3tg^2 \alpha}$ .

Вариант В<sub>1</sub>: № 1 –  $\frac{4}{3}l^3 \cos 2\alpha \sin \alpha$ , № 2 –  $\frac{\pi a^3 tg^2 \alpha \cdot tg \beta}{36}$ .

Вариант В<sub>2</sub>: № 1 –  $\frac{2}{3}l^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha$ , № 2 –  $\frac{2\pi b^3 \sin^2 \alpha tg \beta}{9}$ .

## Контрольная работа № 10. ТЕМА: Элементы комбинаторики

1 вариант	2 вариант
<p>1. Найти <math>A \cup B, A \cap B, B \setminus A</math>, если <math>A = (-\infty; 5), B = [2; 6]</math>.</p> <p>2. Сколькими способами можно составить список из 7 человек?</p> <p>3. Сколько разных отрезков можно провести через 6 точек плоскости?</p> <p>4. Сколькими способами можно из некоторых один – старший?</p> <p>5. Из 9 роз и 6 гербер надосоставить букет, который состоит из 3 роз и 2 гербер. Сколько разных букетов можно составить?</p> <p>6. В подразделении 5 сержантов и 8 солдат. Сколькими способами можно составить наряд из 4 человек, в котором бы хотя бы один сержант?</p> <p>7. Разложить выражение <math>(2x - 3y)^5</math> по формуле бинома Ньютона.</p>	<p>1. Найти <math>A \cup B, A \cap B, A \setminus B</math>, если <math>A = [5; 10], B = (0; 8)</math>.</p> <p>2. Сколькими способами можно из 18 человек выбрать двух дежурных с одинаковыми обязанностями?</p> <p>3. Сколькими способами можно расставить 5 книг разных авторов на полке?</p> <p>4. В состав профкома выбрали 10 людей. Сколькими способами среди них можно выбрать председателя, заместиеля и секретаря?</p> <p>5. В взводе 30 солдат и 5 сержантов. Сколькими способами можно составить наряд из 1 сержанта и 3 солдат?</p> <p>6. Из 7 роз и 8 гербер составляют букет. Сколькими способами можно составить букет из 5 цветов, в котором есть хотя бы одна роза?</p> <p>7. Разложить выражение <math>(5x - 2y)^4</math> по формуле бинома Ньютона.</p>

## Контрольная работа № 11 ТЕМА: Элементы математической статистики и теории вероятностей

1 вариант	2 вариант
<p>1. В ящике 7 белых шаров, 5 черных, 3 синих. Наугад вынимают 5 шаров. Найти вероятность того, что среди них 2 белых, 2 черных и 1 синий.</p> <p>2. В ящике 20 шаров: 12 белых и 8 черных. Наугад берут 3 шара. Какова вероятность того, что среди них 2 шара белых?</p>	<p>1. В ящике 7 белых шаров, 5 черных, 3 синих. Наугад вынимают 6 шаров. Найти вероятность того, что среди них 3 белых, 1 черных и 2 синих.</p> <p>2. В ящике 20 шаров: 12 белых и 8 черных. Наугад берут 3 шара. Какова вероятность того, что среди них 2 шара черных?</p>

<p>3. Два стрелка стреляют одновременно и независимо один от другого. Вероятность попадания в цель первым - 0,8, вторым - 0,6. Найти вероятность того, что :</p> <p>1) попадут оба</p> <p>2) хотя бы один попадет в цель.</p> <p>4. Для выборки 10; 7; 5; 4; 5; 6; 5; 7; 3; 10; 7; 4; 7 составить упорядоченный вариационный ряд, таблицу статистического распределения, найти центральные тенденции и построить полигон частот.</p>	<p>3. Два стрелка стреляют одновременно и независимо один от другого. Вероятность попадания в цель первым - 0,8, вторым - 0,6. Найти вероятность того, что :</p> <p>1) не попадут оба</p> <p>2) только один попадет в цель.</p> <p>9. Для выборки 1; 2; 2; 9; 9; 7; 5; 2; 2; 9; 9; 2; 2 составить упорядоченный вариационный ряд, таблицу статистического распределения, найти центральные тенденции и построить полигон частот.</p>
--	--

**Контрольная работа № 12**  
**«Объем шара и площадь сферы»**  
1 уровень сложности

**Вариант 1**

1. Диаметр шара равен высоте конуса, образующая которого составляет с плоскостью основания угол  $60^\circ$ . Найдите отношение объемов конуса и шара.
2. Объем цилиндра равен  $96\pi^3 \text{ см}^3$ . Площадь его осевого сечения  $48 \text{ см}^2$ . Найдите площадь сферы, описанной около цилиндра.

**Вариант 2**

1. В конус, осевое сечение которого есть правильный треугольник, вписан шар. Найдите отношение площади сферы к площади боковой поверхности конуса.
2. Диаметр шара равен высоте цилиндра, осевое сечение которого есть квадрат. Найдите отношение объемов шара и цилиндра.

2 уровень сложности

**Вариант 1**

1. Медный куб, ребро которого 10 см, переплавлен в шар. Найдите радиус шара.
2. Радиус шара равен R. Определите объем шарового сектора, если дуга в осевом сечении сектора равен  $90^\circ$ .
3. Внешний диаметр полого шара 18 см, толщина стенок 3 см. Найдите объем стенок.

**Вариант 2**

1. Свинцовый шар, диаметр которого 20 см, переплавлен в шарики с диаметром в 10 раз меньше. Сколько таких шариков получилось?
2. Радиус шара равен R. Определите объем шарового сектора, если дуга в его осевом сечении равна  $60^\circ$ .
3. Поверхность шара равна  $225\pi \text{ м}^2$ . Определите его объем.

3 уровень сложности

**Вариант 1**

1. Объем шара  $400 \text{ см}^3$ . На радиусе как на диаметре построен другой шар. Найдите объем малого шара.
2. Площадь поверхности куба равна площади поверхности шара. Найдите отношение объемов куба и шара.
3. Диагональным сечением прямоугольного параллелепипеда, вписанного в шар, является квадрат площадью S. Найдите объем шара.
4. Диаметр шара радиуса 12 см разделен на 3 части, длины которых относятся как 1 : 3 : 4. Через точки деления проведены плоскости, перпендикулярные диаметру. Найдите объем образовавшегося шарового слоя.

**Вариант 2**

1. Объем шара равен  $15 \text{ см}^3$ . На диаметре как на радиусе построен другой шар. Найдите объем большего шара.

- Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда равна площади поверхности шара. Найдите отношение объемов параллелепипеда и шара, если ребра параллелепипеда, исходящие из одной вершины относятся как 1 : 2 : 4.
- Диагональным сечением прямоугольного параллелепипеда, вписанного в шар, является квадрат. Найдите площадь этого диагонального сечения, если объем шара равен  $V$ .
- Диаметр шара радиуса 9 см разделен на 3 части, длины которых относятся как 1 : 2 : 3. Через точки деления проведены плоскости, перпендикулярные диаметру. Найдите объем шарового слоя.

#### Ответы на 1 уровень сложности

Вариант I: 1) 2 : 3; 2)  $100\pi \text{ см}^3$ .

Вариант II: 1) 2 : 3; 2) 2 : 3.

#### Ответы на 2 уровень сложности

Вариант I: 1)  $10\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\pi \text{ см}$ , 2)  $\frac{1}{3}\pi R^3(2 - \sqrt{2})$ , 3)  $\approx 2148 \text{ см}^3$ .

Вариант II: 1) 1000, 2)  $\frac{1}{3}\pi R^3(2 - \sqrt{3})$ , 3)  $562,5\pi \text{ см}^3$ .

#### Ответы на 3 уровень сложности

Вариант I: 1)  $50 \text{ см}^3$ , 2)  $\frac{\sqrt{6}\pi}{6}$ , 3)  $4\sqrt{2}\pi\frac{S^3}{3}$ , 4)  $\frac{719\pi}{3}$ .

Вариант II: 1)  $120 \text{ см}^3$ , 2)  $\frac{6\sqrt{\pi}}{7\sqrt{7}}$ , 3)  $\sqrt[3]{\frac{3\pi^2}{V^2\sqrt{2}}}$  кв.ед., 4)  $414\pi \text{ см}^3$ .

### Контрольная работа № 12 по геометрии в 11 классе с ответами «Объёмы цилиндра, конуса, шара»

#### К-3. Вариант 1

- Осевое сечение конуса – равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна  $9 \text{ м}^2$ . Найдите объем конуса.
- Чему равен объем шарового сектора, если радиус окружности основания равен 60 см, а радиус шара 75 см?
- Усеченный конус имеет радиусы оснований 4 см и 22 см. Чему равен радиус основания равновеликого ему цилиндра, имеющего с усеченным конусом одинаковую высоту?

#### К-3. Вариант 2

- Образующая конуса равна  $l$ , а длина окружности основания равна  $C$ . Найдите объем конуса.
- Два равных шара расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Как относится объем общей части шаров к объему одного шара?
- Площадь осевого сечения усеченного конуса равна разности площадей оснований, а радиусы оснований равны  $R$  и  $r$ . Найдите объем конуса.

#### К-3. Вариант 3

- Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны  $a$ . Найдите объем полученного тела вращения.
- Какую часть объема шара составляет объем шарового сегмента, у которого высота составляет 0,1 диаметра шара, равного 20 см?
- Радиусы оснований усеченного конуса равны 10 м и 6 м, образующая составляет с плоскостью основания угол  $45^\circ$ . Найдите объем конуса.

**К-3. Вариант 4**

1. Прямоугольный треугольник с катетами  $a$  и  $b$  вращается вокруг гипотенузы. Найдите объём полученного тела вращения.
2. Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит диаметр на отрезки, равные 3 см и 9 см. Найдите объём шара.
3. Равнобедренная трапеция вращается вокруг оси симметрии. Найдите объём полученного тела, если основания трапеции равны 6 м и 12 м, а боковая сторона равна 5 м.

**ОТВЕТЫ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ**

Вариант	Ответ
<b>В—1</b>	1. $9\pi \text{ м}^3$ . 2. $112,5\pi \text{ см}^2$ или $450\pi \text{ см}^2$ . 3. 14 см.
<b>В—2</b>	1. $\frac{C^2}{24}\sqrt{4\pi^2 l^2 - C^2}$ . 2. 5 : 16. 3. $\frac{\pi^2}{3}(R^3 - r^3)$ .
<b>В—3</b>	1. $\frac{\pi a^3}{4}$ . 2. 0,028. 3. $\frac{98\pi}{3} \text{ м}^3$ .
<b>В—4</b>	1. $\frac{\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2 + b^2}}$ . 2. $288\pi \text{ см}^3$ . 3. $84\pi \text{ м}^3$ .

**Контрольная работа №13 ТЕМА: Уравнения и неравенства с двумя переменными**  
(базовый уровень)

**«Уравнения и неравенства с двумя переменными»****1 вариант**

- 1) Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению: а)  $x - y + 2 = 0$ , б)  $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$ .
- 2) Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству: а)  $2x + y - 1 \leq 0$ , б)  $x^2 + (y - 2)^2 < 4$ .
- 3) Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:
 
$$\begin{cases} 2x - y + 4 \geq 0, \\ 5y - 2x - 4 \geq 0, \\ y + 2x - 8 \leq 0. \end{cases}$$

**Контрольная работа по алгебре и началам анализа №13(базовый уровень)**

**«Уравнения и неравенства с двумя переменными»****2 вариант**

- Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению: а)  $x + y - 3 = 0$ , б)  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$ .

Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству: а)

$$x - 2y + 3 \geq 0, \quad б) (x + 3)^2 + y^2 > 1.$$

Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют

$$\text{системе неравенств: } \begin{cases} 2y + 3x \geq 0, \\ 3y - x - 11 \leq 0, \\ 4x - y - 11 \leq 0. \end{cases}$$

**Контрольная работа по алгебре и началам анализа №13(профильный уровень)**

**«Уравнения и неравенства с двумя переменными»**

**1 вариант**

- 1) Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению  $x^2 + 4y^2 - 6x + 20y + 25 = 0$ .
- 2) Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству  $|x + 1| + |y| \leq 2$ .
- 3) Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой неравенств 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ (x + y + 2)(y - x + 2) \geq 0. \end{cases}$$
- 4) (доп.) Найти все значения  $a$ , при которых система уравнений 
$$\begin{cases} |x| + 2|y| + |2x - 3y| = 12, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$
 имеет ровно два решения.

**Контрольная работа по алгебре и началам анализа №13(профильный уровень)**

**«Уравнения и неравенства с двумя переменными»**

**2 вариант**

- 1) Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению  $9x^2 + y^2 - 12x + 4y - 8 = 0$ .
- 2) Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству  $|x| + |y - 1| \leq 2$ .
- 3) Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой неравенств 
$$\begin{cases} (x + 1)^2 + y \leq 4, \\ (y + x - 1)(y - x + 1) \leq 0. \end{cases}$$
- 4) (доп.) Найти все значения  $a$ , при которых система уравнений 
$$\begin{cases} 3|x| + |y| + |x + 3y| = 11, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$
 имеет ровно два решения.

**Промежуточная аттестация**  
**Инструкция по выполнению работы**

На выполнение работы по математике отводится 40-45 минут (1 урок).

Работа состоит из 10 заданий. При выполнении заданий надо указывать только ответы, которые записываются в виде числа или последовательности цифр, при этом единицы измерения указывать не нужно.

Если была допущена ошибка при выборе ответа или записан неверный ответ, то надо зачеркнуть ошибочный ответ и записать верный ответ. При этом все необходимые вычисления и преобразования проводятся в черновике. Черновики не проверяются.

Правильный ответ заданий (1-9) оценивается в 1 балл, задание 10 в 2 балла. Баллы, полученные вами за все выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать как можно больше баллов.

**Желаем успеха!**

**ВАРИАНТ 1**

**1.** Найдите значение выражения:  $\left(\frac{4}{9} - 3\frac{1}{15}\right) \cdot 9$

Ответ: \_\_\_\_\_

**2.** Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 120 рублей за штуку и продает с наценкой 20%. Какое наибольшее число таких горшков можно купить в этом магазине на 1000 рублей?

Ответ: \_\_\_\_\_

**3.** Найдите значение выражения:  $(4 \cdot 10^2)^3 \cdot (3 \cdot 10^{-5})$

Ответ: \_\_\_\_\_

**4.** Чтобы перевести значение температуры по шкале Цельсия ( $t^{\circ}\text{C}$ ) в шкалу Фаренгейта ( $t^{\circ}\text{F}$ ), пользуются формулой  $F = 1,8C + 32$ , где  $C$  – градусы Цельсия,  $F$  – градусы Фаренгейта. Какая температура по шкале Фаренгейта соответствует  $(12^{\circ})$  по шкале Цельсия?

Ответ: \_\_\_\_\_

**5.** Вычислить:  $6 \cdot \cos 2\alpha$ , если  $\cos \alpha = 0,4$

Ответ: \_\_\_\_\_

**6.** В доме, в котором живёт Лена, один подъезд. На каждом этаже по девять квартир. Лена живёт в квартире 50. На каком этаже живёт Лена?

Ответ: \_\_\_\_\_

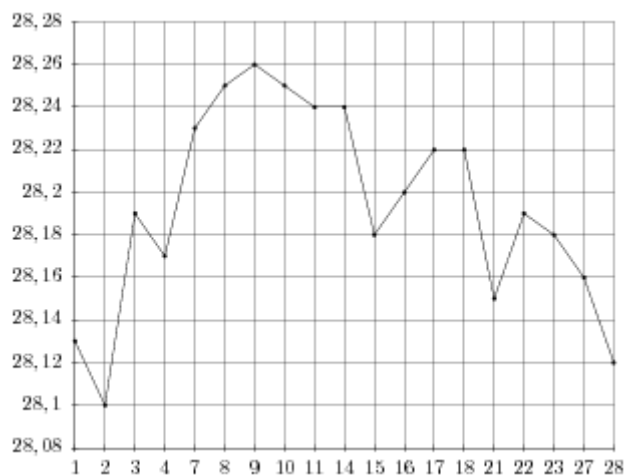
**7.** Решите уравнение:  $\log_7(5 - x) = 2$

Ответ: \_\_\_\_\_

**8.** На рисунке жирными точками показан курс доллара, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни в феврале 2006 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена доллара в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по ри-

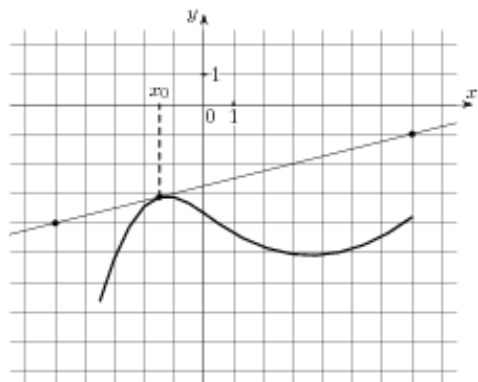


сунку разность между наибольшим и наименьшим курсом доллара за указанный период. Ответ дайте в рублях.



Ответ: \_\_\_\_\_

9 На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



Ответ: \_\_\_\_\_

10 а) Решите уравнение  $\sqrt{2} \cos^2 x = \sin \left( x - \frac{\pi}{2} \right)$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ -\frac{3\pi}{2}; -\pi \right]$

## ВАРИАНТ 2

1. Найдите значение выражения:  $\left(1\frac{5}{6} + \frac{3}{5}\right) \cdot 2$

Ответ: \_\_\_\_\_

2. Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 130 рублей за штуку и продает с наценкой 30%. Какое наибольшее число таких горшков можно купить в этом магазине на 1500 рублей?

Ответ: \_\_\_\_\_

3. Найдите значение выражения:  $(5 \cdot 10^{-2})^3 \cdot (2 \cdot 10^7)$

Ответ: \_\_\_\_\_

4. Чтобы перевести значение температуры по шкале Цельсия ( $t^{\circ}\text{C}$ ) в шкалу Фаренгейта ( $t^{\circ}\text{F}$ ), пользуются формулой  $F = 1,8C + 32$ , где  $C$  – градусы Цельсия,  $F$  – градусы Фаренгейта. Какая температура по шкале Фаренгейта соответствует  $(-7^{\circ})$  по шкале Цельсия?

Ответ: \_\_\_\_\_

5. Вычислить:  $18 \cdot \cos 2\alpha$ , если  $\cos \alpha = 0,7$

Ответ: \_\_\_\_\_

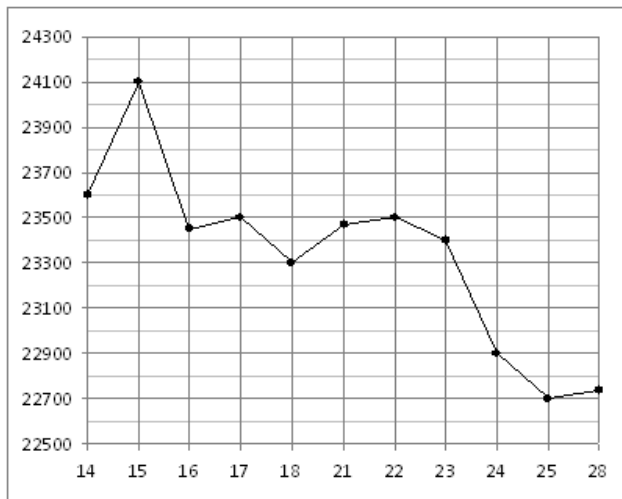
6. В доме, в котором живёт Федя, один подъезд. На каждом этаже по одиннадцать квартир. Федя живёт в квартире 59. На каком этаже живёт Федя?

Ответ: \_\_\_\_\_

7. Решите уравнение:  $\log_5(2 - x) = 1$

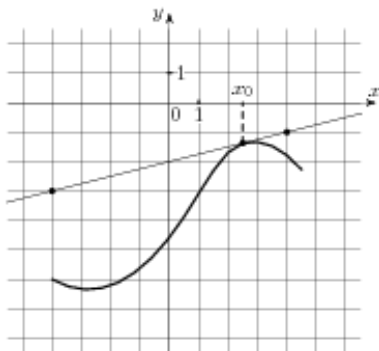
Ответ: \_\_\_\_\_

8. На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 14 по 28 июля 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой олова на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



Ответ: \_\_\_\_\_

9. На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



Ответ: \_\_\_\_\_

10 а) Решите уравнение  $2 \cos^2 x = \sqrt{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

**Итоговая контрольная работа**  
**Инструкция по выполнению работы**

На выполнение работы по математике отводится 40-45 минут (1 урок).

Работа состоит из 10 заданий. При выполнении заданий надо указывать только ответы, которые записываются в виде числа или последовательности цифр, при этом единицы измерения указывать не нужно.

Если была допущена ошибка при выборе ответа или записан неверный ответ, то надо зачеркнуть ошибочный ответ и записать верный ответ. При этом все необходимые вычисления и преобразования проводятся в черновике. Черновики не проверяются.

Правильный ответ заданий (1-9) оценивается в 1 балл, задание 10 в 2 балла. Баллы, полученные вами за все выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать как можно больше баллов.

**Желаем успеха!**

**ВАРИАНТ 1**

**1.** Найдите значение выражения  $\left(\frac{1}{13} - 2\frac{3}{4}\right) \cdot 26$

Ответ: \_\_\_\_\_

**2.** Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 90 рублей за штуку и продает с наценкой 20%. Какое наибольшее число таких горшков можно купить в этом магазине на 1100 рублей?

Ответ: \_\_\_\_\_

**3.** Найдите значение выражения:  $(8 \cdot 10^2)^2 \cdot (3 \cdot 10^{-2})$

Ответ: \_\_\_\_\_

**4.** Чтобы перевести значение температуры по шкале Цельсия ( $t^{\circ}\text{C}$ ) в шкалу Фаренгейта ( $t^{\circ}\text{F}$ ), пользуются формулой  $F = 1,8C + 32$ , где  $C$  – градусы Цельсия,  $F$  – градусы Фаренгейта. Какая температура по шкале Фаренгейта соответствует  $(67^{\circ})$  по шкале Цельсия?

Ответ: \_\_\_\_\_

**5.** Вычислить:  $4 \cdot \cos 2\alpha$ , если  $\sin \alpha = -0,3$

Ответ: \_\_\_\_\_

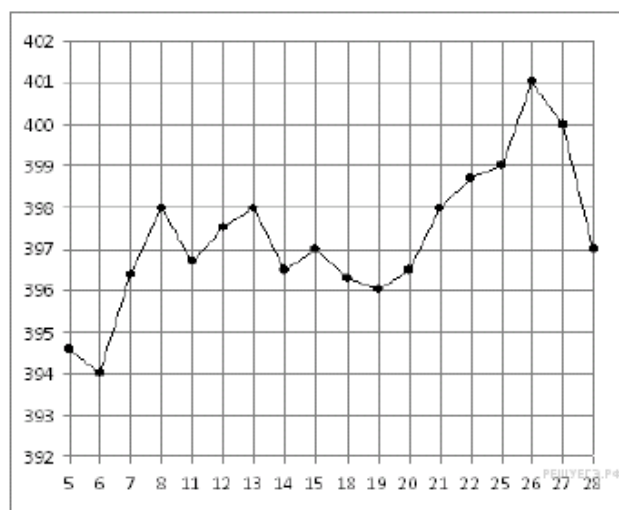
**6.** В доме, в котором живёт Игорь, один подъезд. На каждом этаже по восемь квартир. Игорь живёт в квартире 69. На каком этаже живёт Игорь?

Ответ: \_\_\_\_\_

**7.** Решите уравнение:  $\log_3(-2 - x) = 2$

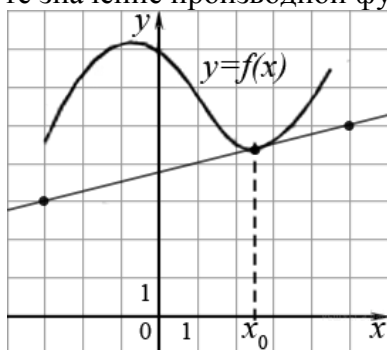
Ответ: \_\_\_\_\_

**8.** На рисунке жирными точками показана цена золота на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 5 по 28 марта 1996 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена унции золота в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой золота на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за унцию).



Ответ: \_\_\_\_\_

9. На рисунке изображён график функции  $y=f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



Ответ: \_\_\_\_\_

10. а) Решите уравнение  $\sqrt{2} \cos^2 x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

## ВАРИАНТ 2

1. Найдите значение выражения  $\left(\frac{5}{6} + 1\frac{1}{10}\right) \cdot 24$

Ответ: \_\_\_\_\_

2. Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 100 рублей за штуку и продает с наценкой 30%. Какое наибольшее число таких горшков можно купить в этом магазине на 1200 рублей?

Ответ: \_\_\_\_\_

3. Найдите значение выражения:  $(2 \cdot 10^{-2})^2 \cdot (14 \cdot 10^4)$

Ответ: \_\_\_\_\_

4. Чтобы перевести значение температуры по шкале Цельсия ( $t^{\circ}\text{C}$ ) в шкалу Фаренгейта ( $t^{\circ}\text{F}$ ), пользуются формулой  $F = 1,8C + 32$ , где  $C$  – градусы Цельсия,  $F$  – градусы Фаренгейта. Какая температура по шкале Фаренгейта соответствует  $(-3^{\circ})$  по шкале Цельсия?

Ответ: \_\_\_\_\_

5. Вычислить:  $-13 \cdot \cos 2\alpha$ , если  $\sin \alpha = -0,2$

Ответ: \_\_\_\_\_

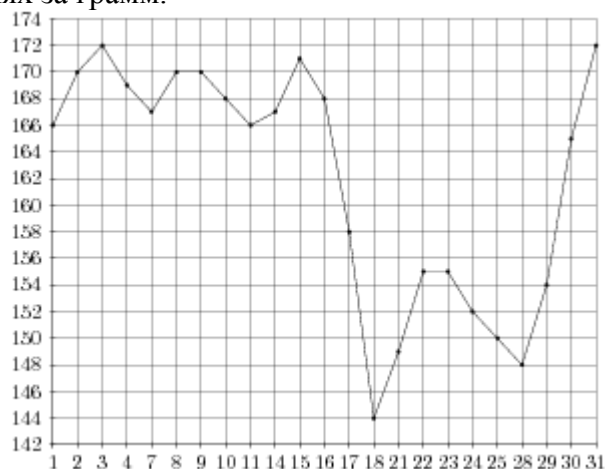
6. В доме, в котором живет Фёдор, один подъезд. На каждом этаже по шесть квартир. Игорь живет в квартире 47. На каком этаже живет Фёдор?

Ответ: \_\_\_\_\_

7. Решите уравнение:  $\log_2(-1 - x) = 1$

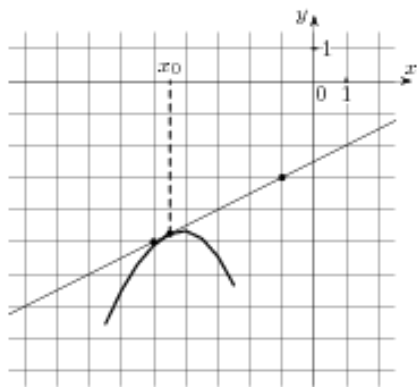
Ответ: \_\_\_\_\_

8. На рисунке жирными точками показана цена палладия, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена палладия в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой палладия за указанный период. Ответ дайте в рублях за грамм.



Ответ: \_\_\_\_\_

9. На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f'(x)$  в точке  $x_0$ .



Ответ: \_\_\_\_\_

**10.** а) Решите уравнение  $2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = -\sqrt{3} \cos x$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ -3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right]$

**Контрольная работа по алгебре и началам анализа №4****«Производная функции» (базовый уровень)****1 вариант**

- 1) Найти производную функции: 1)  $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^3}$ , 2)  $f(x) = \left(\frac{x}{3} + 7\right)^6$ ,  
3)  $f(x) = e^x \cdot \cos x$ , 4)  $f(x) = \frac{\ln x}{1-x}$ .
- 2) Найти значение производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ , если  $f(x) = 1 - 6\sqrt[3]{x}$ ,  $x_0 = 8$ .
- 3) Составить уравнение касательной к графику функции  $f(x) = \sin x - 3x + 2$  в точке  $x_0 = 0$ .
- 4) Найти значения  $x$ , при которых значения производной функции  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$  положительны.
- 5) Найти точки графика функции  $f(x) = x^3 - 3x^2$  в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс.

**Контрольная работа по алгебре и началам анализа №4****«Производная функции» (базовый уровень)****2 вариант**

- 1) Найти производную функции: 1)  $f(x) = 2x^3 - \frac{1}{x^2}$ , 2)  $f(x) = (4 - 3x)^7$ ,  
3)  $f(x) = e^x \cdot \sin x$ , 4)  $f(x) = \frac{2-x}{\ln x}$ .
- 2) Найти значение производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ , если  $f(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $x_0 = \frac{1}{4}$ .
- 3) Составить уравнение касательной к графику функции  $f(x) = 4x - \cos x + 1$  в точке  $x_0 = 0$ .
- 4) Найти значения  $x$ , при которых значения производной функции  $f(x) = \frac{1-x}{x^2+8}$  отрицательны.
- 5) Найти точки графика функции  $f(x) = x^3 + 3x^2$  в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс.
- .....

**Контрольная работа по алгебре и началам анализа №4****«Производная функции» (профильный уровень)****1 вариант**

- 1) Найти производную функции: 1)  $f(x) = \frac{2}{x^5} - 3\sqrt[4]{x^3}$ , 2)  $f(x) = \left(\frac{x}{3} + 5\right)^9$ ,  
3)  $f(x) = e^x \cdot \sin x$ , 4)  $f(x) = \frac{2-x}{\ln x}$ .



- 2) Найти значение производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ , если  $f(x) = \log_2(x^2 + 3)$ ,  $x_0 = 1$ .
- 3) Составить уравнение касательной к графику функции  $f(x) = \sin x - 3x + 2$  в точке  $x_0 = \pi$ .
- 4) Найти значения  $x$ , при которых значения производной функции  $f(x) = e^x x^{-2}$  положительны.
- 5) Найти точки графика функции  $f(x) = \sqrt{5x + 1}$  в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент  $k = \frac{5}{8}$ .
- 6) Найти все значения  $a$ , при которых неравенство  $f'(x) > 0$  не имеет действительных решений, если  $f(x) = \frac{a}{3}x^3 + 2x^2 - x + 5$ .

#### Контрольная работа по алгебре и началам анализа №4

«Производная функции» (профильный уровень)

##### 2 вариант

- 1) Найти производную функции: 1)  $f(x) = 2\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^6}$ , 2)  $f(x) = \left(\frac{x}{5} + 13\right)^{10}$ ,  
3)  $f(x) = e^x \cdot \cos x$ , 4)  $f(x) = \frac{\ln x}{1 - x}$ .
  - 2) Найти значение производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ , если  $f(x) = 3^{x^3 - 1}$ ,  $x_0 = 1$ .
  - 3) Составить уравнение касательной к графику функции  $f(x) = 4x - \cos x + 1$  в точке  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ .
  - 4) Найти значения  $x$ , при которых значения производной функции  $f(x) = x^2 e^{-x}$  отрицательны.
  - 5) Найти точки графика функции  $f(x) = \sqrt{3x + 1}$  в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент  $k = \frac{3}{8}$ .
  - 6) Найти все значения  $a$ , при которых неравенство  $f'(x) > 0$  не имеет действительных решений, если  $f(x) = \frac{a - 4}{3}x^3 + x^2 - x - 4$ .
- .....

#### Контрольная работа по алгебре и началам анализа №7

«Исследование функции с помощью производной»

##### 1 вариант

- 1) Найти экстремумы функции: а)  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$ , б)  $f(x) = e^x(5x - 3)$ .
- 2) Найти интервалы возрастания и убывания функции  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$ .
- 3) Построить график функции  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$ .

- 4) Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$  на отрезке  $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ .
- 5) В прямоугольный треугольник с катетами 5 см и 8 см вписан имеющий с ним общий угол прямоугольник наибольшей площади. Найти площадь прямоугольника.

**Контрольная работа по алгебре и началам анализа №7**

**«Исследование функции с помощью производной»**

**2 вариант**

- 1) Найти экстремумы функции: а)  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ , б)  $f(x) = (8 - 7x)e^x$ .
- 2) Найти интервалы возрастания и убывания функции  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ .
- 3) Построить график функции  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ .
- 4) Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$  на отрезке  $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$ .
- 5) Найти наибольшую площадь ромба, сумма длин диагоналей которого равна 12 см..
- .....

**Контрольная работа по алгебре и началам анализа №8**

**«Первообразная»**

**1 вариант**

- 1) Доказать, что функция  $F(x) = 3x + \sin x - e^{2x}$  является первообразной функции  $f(x) = 3 + \cos x - 2e^{2x}$  на всей числовой оси.
- 2) Найти первообразную  $F(x)$  функции  $f(x) = 2\sqrt{x}$ , график которой проходит через точку  $A\left(0; \frac{7}{8}\right)$ .
- 3) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
- а)  $y = 3x - x^2$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  и осью  $Ox$ ;
- б)  $y = x^2 - 4x + 3$ ,  $y = x^2 - 12x + 35$  и  $y = 8$ .

**Контрольная работа по алгебре и началам анализа №8**

**«Первообразная»**

**2 вариант**

- 1) Доказать, что функция  $F(x) = e^{3x} + \cos x + x$  является первообразной функции  $f(x) = 3e^{3x} - \sin x + 1$  на всей числовой оси.

- 2) Найти первообразную  $F(x)$  функции  $f(x) = -3\sqrt{x}$ , график которой проходит через точку  $A\left(0; \frac{3}{4}\right)$ .
- 3) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
- а)  $y = \cos x$ ,  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{3}$  и осью  $Ox$ ;
- б)  $y = 6x - x^2$ ,  $y = -x^2 + 14x - 40$  и  $y = 9$ .

### Контрольная работа по алгебре и началам анализа №10

#### «Комбинаторика»

##### 1 вариант

- 1) Найти  $\frac{P_{10}}{A_9^7} + C_6^4$ .
- 2) Сколькими способами из числа 15 учащихся класса можно выбрать культорга и казначея?
- 3) Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7 таким способом, чтобы все цифры в числах были различны?
- 4) Записать разложение бинома  $(2 - x)^5$ .
- 5) Сколько существует различных кодов, состоящих из двузначного числа, цифры которого выбираются из цифр 1, 2, 3, и следующего за ним трехбуквенного слова, буквы которого выбираются из гласных букв русского алфавита? (Цифры и буквы в коде не повторяются.)

### Контрольная работа по алгебре и началам анализа №10

#### «Комбинаторика»

##### 2 вариант

- 1) Найти  $P_5 + \frac{A_{10}^3}{C_9^2}$ .
- 2) Сколькими способами 7 детей ясельной группы можно рассадить на 7 стульях.
- 3) Сколькими способами можно составить набор из 5 карандашей, выбирая их из 8 имеющихся карандашей восьми различных цветов?
- 4) Записать разложение бинома  $(a - 1)^6$ .
- 5) Шифр сейфа образуется из двух чисел. Первое, двузначное число, образуется из цифр 1, 2, 3, 4. Второе трехзначное число, образуется из цифр 6, 7, 8 и 9. Сколько различных шифров можно использовать в таком сейфе?

### Контрольная работа по алгебре и началам анализа №11

#### «Вероятность событий»

##### 1 вариант

- 1) Бросают 2 игральных кубика – большой и маленький. Какова вероятность того, что: 1) на обоих кубиках появятся четыре очка; 2) на большом кубике появится 2 очка, а на маленьком – четное число очков?
- 2) В коробке лежат 3 черных, 2 белых и 4 красных шара. Случайным образом вынимается один шар. Какова вероятность того, что это или белый, или красный шар?
- 3) Вероятность попадания по мишени стрелком равна  $\frac{19}{20}$ . Какова вероятность:
- 1) непопадания по мишени при одном выстреле? 2) попадания по мишени в каждом из

двух последовательных выстрелов? 3) попадания при первом и промахе – при втором выстреле?

- 4) В коробке лежат 4 белых и 3 черных шара. Наугад вынимают два шара. Какова вероятность того, что вынуты белый и черный шары?
- 5) В вазе стоят 5 гвоздик и 6 нарциссов. Какова вероятность того, что среди трех случайным образом вынутых цветков окажется, по крайней мере, одна гвоздика?

### Контрольная работа по алгебре и началам анализа №11

#### «Вероятность событий»

##### 2 вариант

- 1) Бросают 2 игральных кубика – большой и маленький. Какова вероятность того, что: 1) на обоих кубиках появятся пять очков; 2) на маленьком кубике появится кратное 3 число очков, а на большом – 5 очков?
  - 2) В коробке лежат 3 черных, 2 белых и 4 красных шара. Случайным образом вынимается один шар. Какова вероятность того, что это или черный, или красный шар?
  - 3) Вероятность попадания по мишени стрелком равна  $\frac{14}{15}$ . Какова вероятность: 1)непопадания по мишени при одном выстреле? 2) попадания по мишени в каждом из двух последовательных выстрелов? 3) попадания при первом и промахе – при втором выстреле?
  - 4) В коробке лежат 4 белых и 3 черных шара. Наугад вынимают два шара. Какова вероятность того, что вынуты два черных шара?
  - 5) В вазе стоят 5 гвоздик и 6 нарциссов. Какова вероятность того, что среди трех случайным образом вынутых цветков окажется, по крайней мере, один нарцисс?
- .....

Контрольная работа  
«Скалярное произведение векторов  
в пространстве. Движения»

1 уровень сложности

**Вариант I**

1. Даны векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , причем  $\vec{a} = 6\vec{i} - 8\vec{k}$ ,  $|\vec{b}| = 1$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ . Найдите:  
а)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; б) значение  $m$ , при котором векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{c} (4; 1; m)$  перпендикулярны.
2. Найдите угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ , или  $A (3, -1, 3)$ ,  $B (3, -2, 2)$ ,  $C (2, 2, 3)$  и  $D (1, 2, 2)$ .
3. Дан правильный тетраэдр  $DABC$  с ребром  $a$ . При симметрии относительно плоскости  $ABC$  точка  $D$  перешла в точку  $D_1$ . Найдите  $DD_1$ .

**Вариант II**

1. Даны векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , причем  $\vec{a} = 4\vec{j} - 3\vec{k}$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$ . Найдите: а)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; б) значение  $m$ , при котором векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{c} (2, m, 8)$  перпендикулярны.
2. Найдите угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ , если  $A (1, 1, 2)$ ,  $B (0, 1, 1)$ ,  $C (2, -2, 2)$  и  $D (2, -3, 1)$ .
3. Дан правильный тетраэдр  $DABC$  с ребром  $a$ . При симметрии относительно точки  $D$  плоскость  $ABC$  перешла в плоскость  $A_1B_1C_1$ . Найдите расстояние между этими плоскостями.

### Вариант I

1. Дано:  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ;  $\vec{a} = 6\vec{i} - 8\vec{k}$ ,  $|\vec{b}| = 1$ ,  $\vec{c} = (4, 1, m)$ ;  $(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = 60^\circ$ .

Найти: а)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; б) значение  $m$ , при котором  $\vec{a} \perp \vec{c}$ .

Решение:

а)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$ ;  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ ,  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ;  $\vec{a} = (6; 0; -8)$ ;

$$|\vec{a}| = \sqrt{36 + 0 + 64} = 10; \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5.$$

б)  $\vec{a} \perp \vec{c}$ , если  $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ ;  $\vec{a} \cdot \vec{c} = 6 \cdot 4 + 0 \cdot 1 + (-8) \cdot m = 24 - 8m$ , так как  $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ , то  $24 - 8m = 0$ ,  $m = 3$ .

(Ответ: а)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$ ; б)  $m = 3$ .)

2. Дано:  $A(3; -1; 3)$ ;  $C(2; 2; 3)$ ;  $B(3; -2; 2)$ ;  $D(1; 2; 2)$ .

Найти: угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ .

Решение: Рассмотрим направляющие векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  прямых  $AB$  и  $CD$ . Найдем координаты  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$ :  $\overrightarrow{AB} = (0; -1; -1)$ ;  $\overrightarrow{CD} = (-1; 0; -1)$ . Для нахождения угла  $J$  между прямыми  $AB$  и  $CD$  воспользуемся формулой

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}, \text{ где } \{x_1; y_1; z_1\} - \text{координаты вектора } \overrightarrow{AB};$$

$$\{x_2; y_2; z_2\} - \text{координаты } \overrightarrow{CD}. \cos \varphi = \frac{|0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot (-1)|}{\sqrt{0+1+1} \cdot \sqrt{1+0+1}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2};$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}, \text{ следовательно } J = 60^\circ. (\text{Ответ: } 60^\circ.)$$

3. Дано:  $DABC$  – правильный тетраэдр,  $AB = a$ ,  $D \rightarrow D_1$  при симметрии относительно плоскости  $ABC$  (рис. 1).

Найти:  $DD_1$ .

Решение:

1.  $DO \perp (ABC)$   $O \in (ABC) \Rightarrow DO \perp O$ .

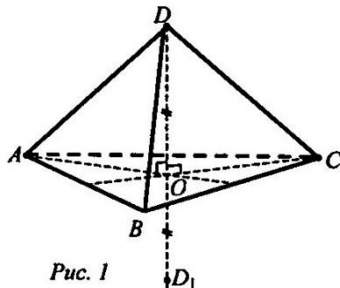
$D \rightarrow D_1$ :  $OD = OD_1$  (симметрия относительно плоскости является движением, т.е. сохраняет расстояние между точками)  $DD_1 = 2OD$ .

2. Найдем длину  $DO$  из  $\triangle DOC$ :  $\angle DOC = 90^\circ$ ;  $DC = a$  (по условию); точка  $O$

– центр описанной около  $\triangle ABC$  окружности  $\Rightarrow OC = R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ;

$$DO = \sqrt{DC^2 - OC^2}. DO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}; DD_1 = 2a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

(Ответ:  $2a\sqrt{\frac{2}{3}}$ .)



### Вариант II

1. Дано:  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ;  $\vec{a} = 4\vec{j} - 3\vec{k}$ ,  $\vec{c} (2, m, 8)$ ;  $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ ;  $(\vec{a} \vec{b}) = 45^\circ$ .

Найдите: а)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; б) значение  $m$ , при котором  $\vec{a} \perp \vec{c}$ .

Решение:

а)  $\vec{a} (0; 4; -3)$ ,  $|\vec{a}| = \sqrt{0+16+9} = 5$ ;  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5\sqrt{2} \cos 45^\circ = 5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5$ .

б)  $\vec{a} \perp \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \cdot 0 \cdot 2 + 4 \cdot m - 3 \cdot 8 = 0$ .  $4m - 24 = 0$ .  $m = 6$ .

(Ответ: а) 5; б)  $m = 6$ .)

2. Дано:  $A (1; 1; 2)$ ,  $B (0; 1; 1)$ ,  $C (2; -2; 2)$ ,  $D (2; -3; 1)$ .

Найти: угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ .

Решение: Аналогично заданию 2 (Вариант № 1) имеем:  $\vec{AB} (-1; 0; -1)$ ;

$\vec{CD} (0; -1; -1)$ .  $\cos \varphi = \frac{|(-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1)|}{\sqrt{1+0+1} \cdot \sqrt{0+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ ;  $\varphi = 60^\circ$ .

(Ответ:  $60^\circ$ .)

3. Дано:  $DABC$  – правильный тетраэдр,  $AB = a$ ,  $(ABC) \rightarrow (A_1B_1C_1)$  при симметрии относительно точки  $D$  (рис. 2).

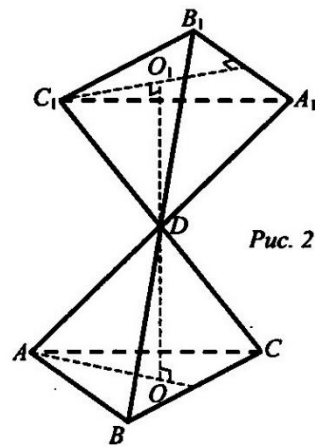
Найти: расстояние между плоскостями  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ .

Решение:

1. Симметрия относительно точки является движением, следовательно сохраняет расстояние между соответствующими точками. Более того  $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$ ,  $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ , а  $DO = DO_1$ .  $2DO = OO_1$ .

2. Аналогичные вычисления (№ 3 Вариант № 1) приводят к аналогичному результату.

(Ответ:  $2a\sqrt{\frac{2}{3}}$ .)



**Вариант I**

1. Вычислите скалярное произведение векторов  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ , если  $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ ,  $\vec{n} = 2\vec{a} - \vec{b}$ ,  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ ,  $\vec{c} \perp \vec{a}$ ,  $\vec{c} \perp \vec{b}$ .
2. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите угол между прямыми  $AD_1$  и  $BM$ , где  $M$  – середина ребра  $DD_1$ .
3. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром  $a$ . При симметрии относительно плоскости  $CC_1 D$  точка  $B_1$  перешла в точку  $B_2$ . Найдите  $AB_2$ .

**Вариант II**

1. Вычислите скалярное произведение векторов  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ , если  $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ ,  $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b}$ ,  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ ,  $\vec{c} \perp \vec{a}$ ,  $\vec{c} \perp \vec{b}$ .
2. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите угол между прямыми  $AC$  и  $DC_1$ .
3. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром  $a$ . При симметрии относительно прямой  $B_1 D_1$  точка  $D$  перешла в точку  $D_2$ . Найдите  $BD_2$ .



### Вариант I

1. Дано:  $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ ,  $\vec{n} = 2\vec{a} - \vec{b}$ ,  $|\vec{a}| = 2$ ;  
 $|\vec{b}| = 3$ ;  $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ .  $\vec{c} \perp \vec{a}$ ;  $\vec{c} \perp \vec{b}$ .

Найти:  $\vec{m} \cdot \vec{n}$ .

Решение:  $\vec{m} \cdot \vec{n} = (\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})(2\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{b}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ , так как по условию  $\vec{c} \perp \vec{a}$ .  
 $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$ , так как  $\vec{c} \perp \vec{b}$ .  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{a, b})$ ;  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cos 60^\circ = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$ .  $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ ;  $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2$ . Подставим значения скалярных произведений векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  в  $\vec{m} \cdot \vec{n}$ :  $\vec{m} \cdot \vec{n} = 2 \cdot |\vec{a}|^2 - 2|\vec{b}|^2 + 3 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 4 - 2 \cdot 9 + 3 \cdot 3 = -1$ . (Ответ: -1.)

2. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – куб,  $DM = MD_1$  (рис. 3).

Найти: угол между прямыми  $AD_1$  и  $BM$ .

Решение:

1. Введем систему координат  $Bxyz$ .
2. Рассмотрим направляющие векторы  $\overrightarrow{AD_1}$  и  $\overrightarrow{BM}$  прямых  $AD_1$  и  $BM$ .  
 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC_1}$ , следовательно  $(\overrightarrow{AD_1}, \overrightarrow{BM}) =$

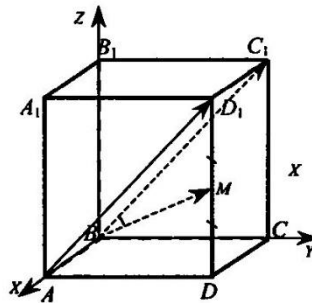


Рис. 3

$= (\overrightarrow{BC_1}, \overrightarrow{BM}) = \varphi$ . Для нахождения угла между прямыми воспользуемся формулой  $\cos \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$ , где  $\overrightarrow{BM} (x_1, y_1, z_1)$ ,

$\overrightarrow{BC_1} (x_2, y_2, z_2)$ . Пусть ребро куба  $AB = a$ , тогда  $B (0; 0; 0)$ ;  
 $C_1 (0; a; a)$ ;  $M (a; a; \frac{a}{2})$ ;  $\overrightarrow{BC_1} (0; a; a)$ ;  $\overrightarrow{BM} (a; a; \frac{a}{2})$ .  $\cos \varphi =$

$$= \frac{0 \cdot a + a \cdot a + a \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{0^2 + a^2 + a^2} \cdot \sqrt{a^2 + a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{\frac{3}{2}a^2}{a\sqrt{2} \cdot \frac{3}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \varphi = 45^\circ. \text{ (Ответ: } 45^\circ \text{.)}$$

3. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – куб,  $AB = a$ ,  $B_1 \rightarrow B_2$  при симметрии относительно плоскости  $CC_1 D_1$  (рис. 4).

Найдите:  $AB_2$ .

Решение:

1. Построим точку  $B_2$ :  $B_1 \rightarrow B_2$ ;  $B_1 C_1 \perp C_1 D_1$ ;  $C_1 B_1 = C_1 B_2$ .

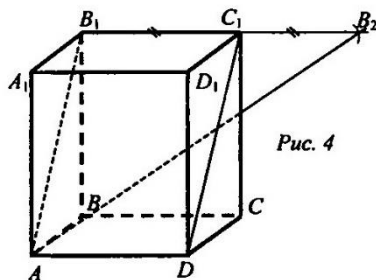


Рис. 4

2. Рассмотрим  $\triangle AB_1 B_2$ :  $\angle AB_1 B_2 = 90^\circ$  (так как  $B_1 B_2 \perp A_1 B_1 C_1$ ,  $B_1 B_2 \perp AB_1$ ).  
 $AB_1 = a\sqrt{2}$ ;  $B_1 B_2 = 2a$ .  $AB_2 = \sqrt{AB_1^2 + B_1 B_2^2}$ ;  $AB_2 = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (2a)^2} = \sqrt{2a^2 + 4a^2} = a\sqrt{6}$ . (Ответ:  $a\sqrt{6}$ .)

### Вариант II

1. Дано:  $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ ;  $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b}$ ;

$|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2; (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ, \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$ .

Найти:  $\vec{m} \cdot \vec{n}$ .

Решение:  $\vec{m} \cdot \vec{n} = (2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} - 2\vec{b}) = 2\vec{a}^2 - 4\vec{a}\vec{b} - \vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}^2 + \vec{a}\vec{c} - 2\vec{b}\vec{c} = 2|\vec{a}|^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 2|\vec{b}|^2$ .  $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0, \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ , так как  $\vec{a} \perp \vec{c}, \vec{c} \perp \vec{b}$   
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}); \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3. \vec{m} \cdot \vec{n} =$   
 $= 2 \cdot 9 - 5 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 18 - 15 + 8 = 11. (\text{Ответ: } 11.)$

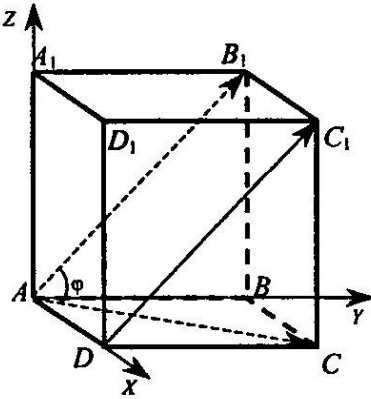


Рис. 5

2. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – куб (рис. 5).

Найти: угол между прямыми  $AC$  и  $DC_1$ .

Решение:

1. Введем систему координат  $Axyz$ .

2. Направляющие векторы  $\vec{AC}$  и  $\vec{DC_1}$  прямых  $AC$  и  $DC_1$ . Используя формулу  $\cos \varphi$  (приведенную в решении задач варианта 1) найдем  $\varphi$ .  $\vec{DC} = \vec{AB}$ , следовательно  $(\vec{AC}, \vec{DC_1}) = (\vec{AC}, \vec{AB_1}) = \varphi$ . Пусть  $AB = a$ , тогда  $A(0; 0; 0); \vec{AB_1}(0; a; a); \vec{AC}(a; a; 0);$

$$\cos \varphi = \frac{0 \cdot a + a \cdot a + a \cdot 0}{\sqrt{0^2 + a^2 + a^2} \cdot \sqrt{a^2 + a^2 + 0}} =$$

$$= \frac{a^2}{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}; \quad \varphi = 60^\circ. (\text{Ответ: } 60^\circ.)$$

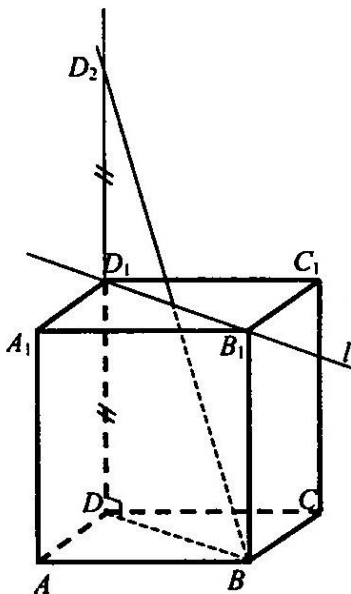


Рис. 6

3. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – куб,  $AB = a, D \rightarrow D_2$  при симметрии относительно прямой  $B_1 D_1$  (рис. 6).

Найдите:  $BD_2$ .

Решение:

1.  $DD_1 \perp A_1 D_1 C_1$ .  $DD_1 = D_1 D_2$  (по определению симметрии относительно прямой).

2.  $\triangle DD_2 B$  – прямоугольный;  $DD_2 = 2a; DB = a\sqrt{2}$ .  $BD_2 = \sqrt{4a^2 + 2a^2} = a\sqrt{6}$ .

(Ответ:  $a\sqrt{6}$ .)

**Вариант I**

1. Даны векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , причем  $|\vec{a}| = 6$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$ . Найдите  $|\vec{a} + 2\vec{b}|$ .
2. В пирамиде  $DABC$  ребра  $DA$ ,  $DB$  и  $DC$  взаимно перпендикулярны и равны  $a$ . Используя векторы, найдите угол между плоскостями  $DAB$  и  $ABC$ .
3. При движении прямая  $a$  отображается на прямую  $a_1$ , а плоскость  $\alpha$  – на плоскость  $\alpha_1$ . Доказать, что если  $a \parallel \alpha$ , то  $a_1 \parallel \alpha_1$ .

**Вариант II**

1. Даны векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , причем  $|\vec{a}| = 7$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$ . Найдите  $|\vec{a} - 3\vec{b}|$ .
2. В пирамиде  $DABC$  ребра  $DA$ ,  $DB$  и  $DC$  взаимно перпендикулярны и равны  $a$ . Используя векторы, найдите угол между прямой  $DA$  и плоскостью  $ABC$ .
3. При движении прямая  $b$  отображается на прямую  $b_1$ , а плоскость  $\beta$  – на плоскость  $\beta_1$ . Докажите, что если  $b \perp \beta$ , то  $b_1 \perp \beta_1$ .

**Вариант I**

1. Дано:  $\vec{a}, \vec{b}; |\vec{a}| = 6; |\vec{b}| = 3; (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$ .

Найдите:  $|\vec{a} + 2\vec{b}|$

Решение:  $|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$ ;  
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}); \vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = 18 \cdot \cos(180^\circ - 60^\circ) = -18 \cdot$   
 $\cos 60^\circ = -18 \cdot \frac{1}{2} = -9. |\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{6^2 + 4(-9) + 4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6. (\text{Ответ: } 6.)$

2. Дано:  $DABC$  – пирамида;  $DA \perp DB \perp DC$ ;  
 $DA = DB = DC = a$  (рис. 7).

Найдите: угол между плоскостями  $DAB$  и  $ABC$ .

Решение:

- 1)  $AC = AD = DC$ ,  $\triangle ABC$  – правильный.
- 2) Угол между плоскостями измеряется величиной двугранного угла.  $MC \perp AB \Rightarrow DM \perp AB$  (теорема о трех перпендикулярах).  $\angle CMD$  – угол между плоскостями  $DAB$  и  $ABC$ .

$$\cos \angle CMD = \frac{\vec{MC} \cdot \vec{MD}}{|\vec{MC}| \cdot |\vec{MD}|}.$$

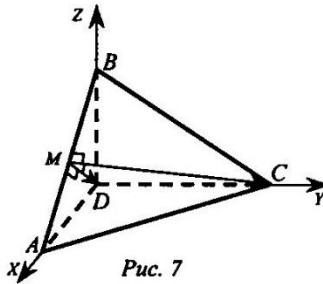


Рис. 7

3)  $D(0; 0; 0), A(a; 0; 0), B(0; a; 0), C(0; a; 0), M(\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2}). \vec{MC}(-\frac{a}{2}; a; -\frac{a}{2}); \vec{MD}(-\frac{a}{2}; 0; -\frac{a}{2}). \vec{MC} \cdot \vec{MD} = -\frac{a}{2} \cdot (-\frac{a}{2}) + a \cdot 0 +$   
 $+ (-\frac{a}{2}) \cdot (-\frac{a}{2}) = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}; |\vec{MC}| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; |\vec{MD}| =$   
 $= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}}; \cos \angle CMD = \frac{a^2 \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot a \sqrt{3} \cdot a} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \angle CMD = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$

3. Дано:  $a; \alpha; a \parallel \alpha$ ; при движении  $a \rightarrow a_1, \alpha \rightarrow \alpha_1$  (рис. 8).

Доказать:  $a_1 \parallel \alpha_1$

Если по условию  $a \parallel \alpha$ , то все точки прямой находятся на одинаковом расстоянии от  $\alpha$ .

Предположим, что при движении  $\alpha_1 \nparallel \alpha_1$ , значит,  $a_1 \cap \alpha_1 = M$ , так как

точки прямой  $a_1$  находятся на различных расстояниях от плоскости  $\alpha_1$ , а это противоречит тому, что при движении расстояние между точками сохраняется. Значит, предположение неверное, т.е.  $a_1 \parallel \alpha_1$ , что и требовалось доказать.

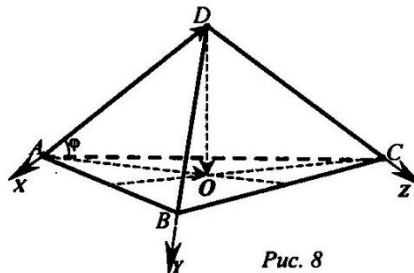


Рис. 8

## Вариант II

1. Дано:  $\vec{a}, \vec{b}$ ,  $|\vec{a}| = 7$ ;  $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ ;  $(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$

Найти:  $|\vec{a} - 3\vec{b}|$

Решение:  $|\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = (\vec{a} - 3\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - 6|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 135^\circ + 9|\vec{b}|^2$ ;  
 $|\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{49 - 6 \cdot 7 \cdot \sqrt{2} \cos(180^\circ - 45^\circ) + 9 \cdot 2} =$   
 $= \sqrt{49 + 42\sqrt{2} \cos 45^\circ + 18} = \sqrt{49 + \frac{42 \cdot \sqrt{2} + 8}{\sqrt{2}}} = \sqrt{49 + 42 + 18} = \sqrt{109}.$

(Ответ:  $\sqrt{109}$ .)

2. Дано:  $DABC$  – пирамида.  $DA \perp DB \perp DC$ ;  $DA = DB = DC = a$ .

Найти: угол между прямой  $DA$  и плоскостью  $ABC$ .

Решение:

1.  $DO \perp$  пл.  $ABC$ .

2.  $\varphi = \angle DAO$ ; Введем систему координат  $DABC$ ;  $D(0; 0; 0)$ ;  $A(a; 0; 0)$ ;

$B(0; a; 0)$ ;  $C(0; 0; a)$   $DO \perp (ABC)$ .  $\cos \varphi = 1 = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{AO}}{|\overline{AD}| \cdot |\overline{AO}|}$ ;  $\triangle ABC$  –

правильный.  $\overline{DO} = \frac{1}{3}(\overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC})$ ;  $\overline{DO} = \frac{1}{3}(a; a; a) = (\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3})$ ;

$\overline{AO} = \overline{AD} + \overline{DO}$ ;  $\overline{AO} = \{-a; 0; 0\} + \{\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3}\}$ ;  $\overline{AO} = \{-\frac{2}{3}a; \frac{a}{3}; \frac{a}{3}\}$ ;

$|\overline{AO}| = \sqrt{\frac{4}{9}a^2 + \frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{9}} = \sqrt{\frac{6a^2}{9}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ ;  $\overline{AO} \cdot \overline{AD} = -\frac{2a}{3} \cdot (-a) + \frac{a}{3} \cdot 0 +$

$+\frac{a}{3} \cdot 0 = \frac{2a^2}{3}$ ;  $\cos \varphi = \frac{2a^2 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot a \cdot a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ;  $\varphi = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$ ;

(Ответ:  $\arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$ .)

3. Дано:  $b; \beta$ ;  $b \cap \beta = M$ ,  $b \perp \beta$ ;  $b \rightarrow b_1$ ,  $\beta \rightarrow \beta_1$  (рис. 9).

Доказать, что  $b_1 \perp \beta_1$ .

Решение: Выберем произвольные точки  $A \in \beta$ ;  $B \in \beta$ ;  $C \in \beta$ ,  
 $b \perp \beta \Rightarrow AM \perp \beta$  и  $\triangle AMB$  и  $\triangle AMC$  – прямоугольные.  $AM^2 = AB^2 - BM^2 =$   
 $= AC^2 - CM^2$ . При движении  $AB = A_1B_1$ ;  $AM = A_1M_1$ ;  $AC = A_1C_1$ ;  $A_1M_1^2 =$   
 $= A_1B_1^2 - B_1M_1^2 \Rightarrow A_1M_1 \perp B_1M_1$ .  $A_1M_1^2 = A_1C_1^2 - C_1M_1^2 \Rightarrow A_1M_1 \perp C_1M_1$ , та-  
 ким образом,  $A_1M_1 \perp \beta_1$  (по признаку перпендикулярности прямой и плос-  
 кости, следовательно,  $b_1 \perp \beta_1$ , что и требовалось доказать.

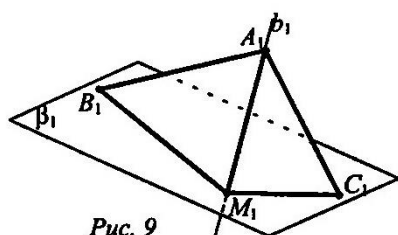
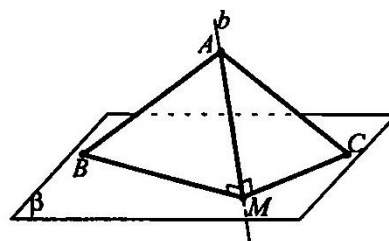


Рис. 9



**11 класс**

**К—6, В—1**

1. Даны векторы  $\vec{a}\{1; -2; 0\}$ ,  $\vec{b}\{3; -6; 0\}$ ,  $\vec{c}\{0; -3; 4\}$ . Найдите координаты вектора  $\vec{p} = 2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}$ .

2. Найдите угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ , если  $A(6; -4; 8)$ ,  $B(8; -2; 4)$ ,  $C(12; -6; 4)$ ,  $D(14; -6; 2)$ .

3. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите угол  $\varphi$  между векторами  $\overrightarrow{AD_1}$  и  $\overrightarrow{BM}$ , где  $M$  — середина ребра  $DD_1$ .

**11 класс**

**К—6, В—2**

1. Даны векторы  $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$  и  $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{k}$ , где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные взаимно перпендикулярные векторы (орты). Найдите скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

2. Найдите угол между прямыми  $MN$  и  $EF$ , если  $M(1; 1; 0)$ ,  $N(3; -1; 0)$ ,  $E(4; -1; 2)$ ,  $F(0; 1; 0)$ .

3. Даны координаты вершин тетраэдра  $MABC$ :  $M(2; 5; 7)$ ,  $A(1; -3; 2)$ ,  $B(2; 3; 7)$ ,  $C(3; 6; 0)$ . Найдите расстояние от точки  $K$  до точки  $O$ , где  $K$  — середина ребра  $AM$ ,  $O$  — середина ребра  $BC$ .

1. Даны векторы  $\vec{a}\{2; 4; -6\}$ ,  $\vec{b}\{-3; 1; 0\}$ ,  $\vec{c}\{3; 0; -1\}$ . Найдите координаты вектора  $\vec{p} = -\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ .

2. Найдите угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ , если  $A(\sqrt{3}; 1; 0)$ ,  $B(0; 0; 2\sqrt{2})$ ,  $C(0; 2; 0)$ ,  $D(\sqrt{3}; 1; 2\sqrt{2})$ .

3. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите угол между векторами  $\vec{AC}$  и  $\vec{C_1 D}$ .

1. Даны векторы  $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$  и  $\vec{b} = 3\vec{j} + 2\vec{k}$ , где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные взаимно перпендикулярные векторы (орты). Найдите скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

2. Найдите угол между прямыми  $MN$  и  $KE$ , если  $M(2; 0; 0)$ ,  $N(0; 2; 0)$ ,  $K(2; 2; 0)$ ,  $E(2; 2; 2)$ .

3. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  точка  $M$  — центр грани  $AA_1 D_1 D$ . Найдите угол  $\varphi$  между векторами  $\vec{BM}$  и  $\vec{B_1 C}$ , если измерения параллелепипеда  $AB = 4$  м,  $AD = 3$  м,  $AA_1 = 5$  м.

### ОТВЕТЫ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ

Вариант	Ответ
В—1	1. $\vec{p}\{1; 4; -4\}$ . 2. $\frac{\pi}{6}$ . 3. $\cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$ .
В—2	1. 6. 2. $\frac{\pi}{6}$ . 3. $\frac{\sqrt{57}}{2}$ .
В—3	1. $\vec{p}\{-10; 0; 4\}$ . 2. $\frac{\pi}{3}$ . 3. $\frac{2\pi}{3}$ .
В—4	1. 2. 2. $90^\circ$ . 3. $\cos \varphi = -\frac{8}{7\sqrt{17}}$ .

## Контрольная работа по геометрии в 11 классе с ответами «Цилиндр и его поверхность. Конус и его поверхность. Сфера и шар»

### К-1. Вариант 1

1. Развёртка боковой поверхности цилиндра является квадратом, диагональ которого равна 10 см. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.
2. Высота конуса равна 6 см, угол при вершине осевого сечения равен  $120^\circ$ . Найдите:
  - а) площадь боковой поверхности конуса;
  - б) площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через две образующие, угол между которыми равен  $30^\circ$ .
3. Диаметр шара равен 2м. Через конец диаметра проведена плоскость под углом  $45^\circ$  к нему. Найдите длину линии пересечения сферы и этой плоскости.

### К-1. Вариант 2

1. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу в  $120^\circ$ . Высота цилиндра равна 5 см, радиус основания равен  $2\sqrt{3}$  см. Найдите площадь сечения.
2. Радиус основания конуса равен 6 см, а образующая наклонена к плоскости основания под углом  $30^\circ$ . Найдите:
  - а) площадь боковой поверхности конуса;
  - б) площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через две образующие, угол между которыми равен  $60^\circ$ .
3. Сечение шара плоскостью, находящейся от его центра на расстоянии 3 см, имеет радиус 4 см. Найдите площадь сферы.

### К-1. Вариант 3

1. Сечение цилиндра плоскостью, параллельной оси, есть квадрат. Секущая плоскость отсекает от окружности основания дугу в  $90^\circ$ . Радиус основания цилиндра равен 4 см. Найдите площадь сечения.
2. Радиус кругового сектора равен 6 см, а его угол  $120^\circ$ . Сектор свёрнут в коническую поверхность. Найдите площадь поверхности конуса.
3. В шаре на расстоянии 12 см от центра проведена секущая плоскость так, что образовавшийся в сечении круг имеет радиус 5 см. Найдите площадь сферы.

### К-1. Вариант 4

1. Развёртка боковой поверхности цилиндра является прямоугольником, диагональ которого равна 8 см, а угол между диагоналями равен  $30^\circ$ . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
2. Образующая конуса равна  $a$ , угол при вершине осевого сечения равен  $a$ . Найдите площадь боковой поверхности конуса.
3. В шаре по одну сторону от центра проведены два параллельных сечения, площади которых  $45\pi$  дм<sup>2</sup> и  $4\pi$  дм<sup>2</sup>. Найдите площадь сферы, если расстояние между плоскостями 9 дм.



## ОТВЕТЫ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ

Вариант	Ответ
<b>В—1</b>	1. $50 + 25\pi \text{ см}^2$ . 2. а) $72\sqrt{3}\pi \text{ см}^2$ ; б) $36 \text{ см}^2$ . 3. $\sqrt{2}\pi m^2$ .
<b>В—2</b>	1. $30 \text{ см}^2$ . 2. а) $24\sqrt{3}\pi \text{ см}^2$ ; б) $12\sqrt{3} \text{ см}^2$ . 3. $100\pi \text{ см}^2$ .
<b>В—3</b>	1. $32 \text{ см}^2$ . 2. $16\pi \text{ см}^2$ . 3. $-676\pi \text{ см}^2$ .
<b>В—4</b>	1. $256\pi \text{ см}^2$ . 2. $\pi a^2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \text{ см}^2$ . 3. $25\pi \text{ дм}^2$ .

Контрольная работа по геометрии в 11 классе с ответами «Объёмы параллелепипеда, призмы, пирамиды»

### К-2. Вариант 1

1. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 8 см, боковое ребро образует с плоскостью основания угол в  $45^\circ$ . Найдите объём пирамиды.
2. В прямой треугольной призме стороны основания относятся как  $17 : 10 : 9$ , а боковое ребро равно 16 см. Найдите стороны основания пирамиды, если площадь её боковой поверхности составляет  $1152 \text{ см}^2$ .

### К-2. Вариант 2

1. Высота боковой грани правильной четырёхугольной пирамиды равна 10 см. Найдите объём пирамиды, если боковая грань составляет с плоскостью основания угол  $45^\circ$ .
2. В основании прямой треугольной призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 8 см и 6 см. Найдите объём призмы, если площадь её боковой поверхности равна  $120 \text{ см}^2$ .

### К-2. Вариант 3

1. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 6 см и составляет с плоскостью основания угол  $60^\circ$ . Найдите объём пирамиды.
2. Сторона основания правильной шестиугольной призмы равна  $a$ , наибольшая диагональ призмы составляет с плоскостью основания призмы угол  $\alpha$ . Найдите высоту призмы и её объём.

### К-2. Вариант 4

1. Апофема правильной треугольной пирамиды равна 4 см, а двугранный угол при основании равен  $60^\circ$ . Найдите объём пирамиды.
2. В прямом параллелепипеде стороны основания, равные  $4\sqrt{2} \text{ см}$  и  $10 \text{ см}$ , образуют угол в  $45^\circ$ . Меньшая диагональ параллелепипеда 14 см. Найдите его объём.

## ОТВЕТЫ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ

Вариант	Ответ
В—1	1. $\frac{256\sqrt{2}}{3} \text{ см}^3$ . 2. 34 см, 20 см, 18 см.
В—2	1. $\frac{1000\sqrt{2}}{3} \text{ см}^3$ . 2. $120 \text{ см}^3$ .
В—3	1. $20\frac{1}{4} \text{ см}^3$ . 2. $2a \operatorname{tg} \alpha$ ; $3\sqrt{3} a^3 \operatorname{tg} \alpha$ .
В—4	1. $24 \text{ см}^3$ . 2. $480 \text{ см}^3$ .

Контрольная работа по геометрии в 11 классе с ответами «Взаимное расположение многогранников и тел вращения»

### ГЕОМЕТРИЯ 11 КЛАСС (УМК АТАНАСЯН) КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4 (АВТ. ИЧЕНСКАЯ)

#### К-4. Вариант 1

- Диаметр шара равен высоте цилиндра, осевое сечение которого есть квадрат. Найдите отношение объёмов шара и цилиндра.
- Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды равно  $a$  и составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ . Найдите объём пирамиды и вписанного в пирамиду конуса, если  $a = 2$ ,  $\alpha = 60^\circ$ .
- В конус вписан шар радиуса  $R$ . Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол  $60^\circ$ . Найдите объём конуса.

#### К-4. Вариант 2

- В конус, осевое сечение которого есть правильный треугольник, вписан шар. Найдите отношение площади сферы к площади боковой поверхности конуса.
- В цилиндр вписана призма. Основанием призмы служит прямоугольный треугольник, катет которого равен  $2a$ , а прилежащий угол равен  $60^\circ$ . Диагональ большей боковой грани призмы составляет с плоскостью её основания угол  $45^\circ$ . Найдите объём цилиндра.
- В правильной треугольной пирамиде каждое боковое ребро равно  $b$  и образует с плоскостью основания угол  $30^\circ$ . Найдите площадь описанной сферы.

#### К-4. Вариант 3

- Объём цилиндра равен  $96\pi \text{ см}^3$ , площадь его осевого сечения равна  $48 \text{ см}^2$ . Найдите площадь сферы, описанной около цилиндра.
- Высота правильной треугольной пирамиды равна  $h$ , а двугранный угол при основании равен  $\alpha$ . Найдите объём пирамиды и вписанного в пирамиду шара, если  $h = 3$ ,  $\alpha = 60^\circ$ .
- В шар радиуса  $R$  вписан конус. Найдите объём конуса, если угол при вершине осевого сечения конуса равен  $60^\circ$ .

#### К-4. Вариант 4

- Диаметр шара равен высоте конуса, образующая которого составляет с плоскостью основания угол в  $60^\circ$ . Найдите отношение объёма конуса к объёму шара.
- Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна  $a$  и составляет с плоскостью боковой грани угол  $\alpha$ . Найдите объём призмы и описанного около неё цилиндра, если  $a = 4$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .
- Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна  $a$ , двугранный угол при основании равен  $60^\circ$ . Найдите площадь вписанной сферы.

# ОТВЕТЫ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ

Вариант	Ответ
В—3	<ol style="list-style-type: none"> <li><math>\frac{\pi a^3}{4}</math>.</li> <li>0,028.</li> <li><math>\frac{98\pi}{3} \text{ м}^3</math>.</li> </ol>
В—4	<ol style="list-style-type: none"> <li><math>\frac{\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2 + b^2}}</math>.</li> <li><math>288\pi \text{ см}^3</math>.</li> <li><math>84\pi \text{ м}^3</math>.</li> </ol>
В—1	<ol style="list-style-type: none"> <li>2 : 3.</li> <li><math>V_{\text{п}} = 1,5; V_{\text{к}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{4}</math>.</li> <li><math>3\pi R^3</math>.</li> </ol>
В—2	<ol style="list-style-type: none"> <li>2 : 3.</li> <li><math>16\pi a^3</math>.</li> <li><math>4\pi b^2</math>.</li> </ol>
В—3	<ol style="list-style-type: none"> <li><math>100\pi \text{ см}^3</math>.</li> <li><math>V_{\text{п}} = 9\sqrt{3}; V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi</math>.</li> <li><math>0,375\pi R^3</math>.</li> </ol>
В—4	<ol style="list-style-type: none"> <li>2 : 3.</li> <li><math>V_{\text{вр}} = 12; V_{\text{ц}} = 6\pi</math>.</li> <li><math>\frac{1}{3}\pi a^2</math>.</li> </ol>